АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТРУДЫ ТРЕТЬЕГО ВСЕСОЮЗНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЪЕЗДА

Москва, июнь—июль 1956

Том 1

СЕКЦИОННЫЕ ДОКЛАДЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва · 1956

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

К. К. Биллевич (*Орджоникидзе*). **О единицах алгебраических полей 3-го и 4-го порядков.** В своей известной докторской диссертации «Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей» Г. Ф. Вороной предложил алгорифмы для разыскания основных единиц кубических полей, которые сразу приводят к основным единицам, между тем как алгорифмы многих других математиков (например, Шарва и Минковского), весьма интересовавшихся вопросом нахождения единиц, позволяют находить лишь систему независимых единиц, а из нее уже путем попыток, которых, вообще говоря, может оказаться очень много, находить и основную систему единиц.

Блестящая геометрическая интерпретация алгорифма Вороного для случая отрицательного дискриминанта была дана Б. Н. Делоне, случай положительного дискриминанта интерпретирован Д. К. Фаддеевым.

Алгорифмы Вороного не допускают прямого обобщения для полей более высоких порядков.

В данной работе предлагаются способы нахождения систем основных единиц алгебраических полей 3-го и 4-го порядков, также приводящие сразу к основной системе, минуя предварительное нахождение какой-либо системы независимых единиц.

Исследования ведутся геометрически.

В решетках, повторяющихся умножением, соответствующих рассматриваемым полям, строятся особые последовательности точек, из которых выбираются точки, дающие сразу основные единицы полей.

Предлагаемые способы оказались практически пригодными для составления таблиц систем основных единиц полей 3-го и 4-го порядков.

Возможны обобщения для полей более высоких порядков.

К. Г. Бороздкин (*Москва*). **К вопросу о постоянной И. М. Виноградова.** В 1937 г. И. М. Виноградов доказал, что существует такая абсолютная постоянная C_0, что любое нечетное натуральное $N \geqslant C_0$ может быть представлено в виде суммы трех нечетных простых чисел. Эту постоянную C_0 будем называть постоянной И. М. Виноградова.

Теорема. $\log\log C_0 \leqslant 16{,}038$.

Для получения этого результата автор оценил константы в классических теоремах о распределении нулей L-функций Дирихле данного модуля и подсчитал постоянные, в оценке И. М. Виноградова, тригонометрической суммы $\sum\limits_{\substack{(p)\\ 3\leqslant p\leqslant N}} e^{2\pi i\alpha p}$

Б. М. Бредихин (*Куйбышев*). **Некоторые вопросы теории характеров коммутативных полугрупп.** 1. Теорема Чудакова—Линника о неограниченном росте сумматорных функций характеров алгебраических числовых полугрупп, обобщенная автором ранее на вещественные полугруппы с конечными и бесконечными редкими базами, распространяется на полугруппы общего типа, в частности на полугруппы идеалов $\neq (0)$ конечного расширения поля рациональных чисел и на полугруппы комплексных чисел.

2. Для рациональных числовых полугрупп решается в положительном смысле вопрос о существовании обобщенных характеров.

Построение характера с бесконечной рациональной базой и ограниченной сумматорной функцией осуществляется при помощи уплотнения базы характера $\chi(r)$ с конечной рациональной базой $r_1, r_2, \ldots, r_N$ $(N \geqslant 2)$.

А. З. Вальфиш (*Тбилиси*). **К теореме Виноградова о трех простых числах.** Пусть m обозначает произвольное целое число $\geqslant 3$; B_m — подходящие действительные числа, по модулю не превосходящие пределов, зависящих только от m; P — нечетные целые числа $\geqslant 6$; $R = \log P$; p_1, p_2, p_3 — нечетные простые числа;

$$\nu(P) = \sum_{p_1+p_2+p_3=P} 1;$$

$$S(P) = \sum_{q=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\right)^3 \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \exp\left(-\frac{2\pi i a P}{q}\right).$$

В докладе в общих чертах изложен ход доказательства следующей теоремы, являющейся более точной формой известной теоремы Виноградова о представлении больших нечетных чисел в виде суммы трех нечетных простых.

Т е о р е м а. Имеет место равенство

$$\nu(P) = S(P)\, P^2 \sum_{r=3}^{m} c_r R^{-r} + B_m P^2 R^{-m-1},$$

где c_r — действительные числа, зависящие только от r. При этом

$$c_3 = \frac{1}{2}, \quad c_4 = \frac{9}{4}, \quad c_5 = \frac{21}{2} - \frac{\pi^2}{4}, \quad c_6 = \frac{225}{4} - \frac{15}{8}\pi^2 - 7\zeta(3),$$

$$c_7 = \frac{1395}{4} - \frac{105}{8}\pi^2 - \frac{7}{30}\pi^4 - 63\zeta(3).$$

А. И. Виноградов (*Ленинград*). **Новые аддитивные задачи с простыми числами.** Справедлива следующая теорема.

Любое достаточно большое четное число представимо в виде суммы двух слагаемых, каждое из которых имеет не больше трех простых делителей, включая и кратность.

Доказательство проводится методом «решета» Эратосфена в интерпретации А. Сельберга с привлечением теории дзета-функции Римана.

Б. В. Демьянов (*Москва*). **Об одной гипотезе относительно представления нуля формами с p-адическими коэффициентами.** Существует гипотеза, что при $m > n^2$ всякая форма степени n от m переменных с p-адическими коэффициентами представляет 0 в поле p-адических чисел. Для $n = 2$ доказательство этого утверждения было известно еще Минковскому, для $n = 3$, $p \neq 3$ гипотеза была доказана автором в 1950 г., а для $n = 3$, $p = 3$ — Льюисом в 1952 г.

В последнее время автором получены следующие результаты.

1. Гипотеза верна для «чистых» форм любой степени, т. е. форм вида $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^n$ (см. [1]).

2. «Чистая» форма над полем p-адических чисел, представляющая 0, является универсальной (см. [2]). Легко показать на примерах, что для форм над произвольным полем это, вообще говоря, неверно.

3. При $m > 8$ любая пара квадратичных форм с p-адическими коэффициентами от m переменных совместно представляет 0 в поле p-адических чисел. Это является доводом в пользу справедливости указанной гипотезы, так как легко показать, что если бы этот факт был неверен, то и гипотеза была бы неверна при $n = 4$.

Лит.: 1. Демьянов В. Б., ДАН СССР **105**, № 2, (1955). 2. Демьянов В. Б., ДАН СССР **105**, № 3, (1955).

П. Г. Когония (*Тбилиси*). **О множестве точек сгущения множества чисел Маркова.** Обозначим через α иррациональное число интервала $(0,1)$, $\alpha = [0;\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots]$; M — множество всех чисел $\alpha \in (0,1)$ с ограниченной последовательностью неполных частных a_k; $M(N)$ — множество всех α, для которых

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k = N \qquad (N = 1,\ 2,\ 3, \ldots);$$

$$L(\alpha) = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\,([a_k;\ a_{k+1},\ a_{k+2}, \ldots] + [0;\ a_{k-1},\ a_{k-2}, \ldots, a_1])};$$

$M_L(N)$ — множество всех значений функции $L(\alpha)$ при α, пробегающем $M(N)$;

$M_L = \sum\limits_{N=1}^{\infty} M_L(N)$ — множество всех чисел Маркова.

О множестве чисел Маркова известно несколько фактов (см. [1], стр. 32—33; [2], стр. 121—132).

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению этого множества. В ней доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. Минимальная точка множества $M_L(N)$ $(N \geqslant 2)$ является его минимальной точкой сгущения.

Теорема 2. Максимальная точка множества $M_L(N)$ $(N \geqslant 2)$ является его изолированной точкой.

Теорема 3. Если

$$\alpha_0 = [0;\ (N-1)_{m_1},\ N,\ N,\ (N-1)_{m_2},\ N,\ N, \ldots, (N-1)_{m_k},\ N,\ N, \ldots],$$

$$m_k \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то

$$L(\alpha_0) = \frac{2(N-1)}{N^2 + N + (N-2)\sqrt{N^2 - 2N + 5}}$$

является точкой сгущения множества $M_L(N)$.

Лит.: 1. Koksma J. F., Diophantische Approximationen, Berlin, 1936. 2. Когония П. Г., Труды Тбилисск. матем. ин-та **19**, (1953).

И. П. Кубилюс (*Вильнюс*). **О распределении значений теоретико-числовых функций.** Вещественная арифметическая функция $f(m)$ (т. е. функция, определенная на множестве натуральных чисел) называется аддитивной, если $f(mn) = f(m) + f(n)$ для $(m, n) = 1$. Оказывается, что такие функции вообще ведут себя в известном смысле, как суммы случайных величин. Сочетание теоретико-числовых и вероятностных соображений позволяет построить теорию распределения значений этих функций, аналогичную теории суммирования случайных величин некоторого вида.

Пусть $N_n\{\ \}$ означает число натуральных чисел $m \leqslant n$, удовлетворяющих условиям, которые будут каждый раз написаны в скобках; пусть

$$A_n = \sum_{p \leqslant n} \frac{f(p)}{p}, \qquad B_n = \left(\sum_{p^\alpha \leqslant n} \frac{f^2(p^\alpha)}{p^\alpha}\right)^{\frac{1}{2}},$$

где суммы берутся соответственно по всем простым $p \leqslant n$ и по всем целым положительным степеням простых чисел $p^\alpha \leqslant n$. Для довольно широкого класса аддитивных функций найдены необходимые и достаточные условия, чтобы

$$\frac{1}{n} N_n \{f(m) < A_n + B_n x\}, \quad \frac{1}{n} N_n \{f(m) < f(m+a) + B_n x\},$$
$$\frac{1}{n} N_n \{f(m) < A_n + B_n x_1, \quad f(m+a) < A_n + B_n x_2\}$$

(a — фиксированное унатральное число) стремились, в основном при $n \to \infty$, к некоторым функциям распределения. Здесь функции распределения понимаются так же, как и в теории случайных величин. Эти результаты распространяются на системы нескольких аддитивных функций, а также на дробные доли аддитивных функций.

Для аддитивных функций доказывается также аналог известной теоремы А. Н. Колмогорова, относящейся к поведению в целом последовательности сумм независимых случайных величин.

Б. В. Левин (*Ташкент*). **Об одном специальном классе дифференциальных операторов, связанном с теорией модулярных функций и теорией чисел.** Можно доказать, что оператор $A_{\rho, k, l}$, определяемый соотношением

$$A_{\rho, k, l}(f(\tau), \varphi(\tau)) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\rho} (-1)^n C_\rho^n \frac{(k+\rho-1)\ldots(k+\rho-n)}{l(l+1)\ldots(l+n-1)} \frac{d^n \varphi(\tau)}{d r^n} \cdot \frac{d^{2\rho-n} f(r)}{d\tau^{2\rho-n}},$$

преобразует модулярные функции $f(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ типов $\{-k, N, \varepsilon\}$ и $-\{l, N, \varepsilon\}$ соответственно в модулярную функбию типа $\{-(2\rho + l + k), N, \varepsilon\}$.

Систематически применяя этот факт и теорему Римана—Роха, можно получить различные теоретико-числовые результаты (здесь имеется в виду следующий специальный случай теоремы Римана—Роха: имеется не более $\left[\frac{k}{4}\right] + 1$ линейно независимых модулярных функций типа $\{-k, 2, \varepsilon\}$).

Оператор $A_{\rho, k, l}$ является в известном смысле обобщением производной Шварца.

Применением вышеуказанного метода получается очень простой вывод формул для числа представлений n в форме $x_1^2 + \ldots + x_{2k}^2$. На этой же основе можно обобщить дифференциальное уравнение Ван дер Поля для $\alpha_1(\tau)$ ($\alpha_1(\tau) = 1 - 12 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) e^{2\pi i \tau n}$ удовлетворяет уравнению $y''y - \frac{3}{2} y'^2 = -\frac{1}{2\pi i} y'''$, $\sigma_k(n) = \sum_{d/n} d^k$) и получить некоторые сравнения для $\tau(n)$ Рамануджана.

Таким образом получается, что

$$\tau(n) \equiv \begin{cases} n^2\sigma_3(n) \text{ и } n^2\sigma_7(n) \pmod{240}, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 4 \text{ или } n \equiv 1 \pmod 2, \\ n^2\sigma_3(n) \text{ и } n^2\sigma_7(n) \pmod{120}, & \text{если } n \equiv 2 \pmod 4, \text{ но } n \neq 2(2l+1)^2, \\ n^2\sigma_3(n) \text{ и } n^2\sigma_7(n) \pmod{60}, & \text{если } n = 2(2l+1)^2; \end{cases}$$

$$\tau(n) \equiv n^2\sigma_5(n) \begin{cases} \pmod{48}, & \text{если } n \equiv 0 \pmod 4, \\ \pmod{24}, & \text{если } n \equiv 1 \pmod 2 \text{ или } n \equiv 2 \pmod 4, \text{ но } n \neq 2(2l+1)^2, \\ \pmod{12}, & \text{если } n = 2(2l+1)^2. \end{cases}$$

Вместе с тем

$$\tau(n) \not\equiv \begin{cases} n^2\sigma_3(n) \pmod{120}, \\ n^2\sigma_5(n) \pmod{24}, \\ n^2\sigma_7(n) \pmod{120}, \end{cases}$$

если $n = 2(2l+1)^2$.

Отметим следующий факт: если модулярная функция $f(\tau)$ имеет разложение в ряд

$$f(\tau)=a_0+C\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\,e^{\frac{2\pi i\tau n}{N}}$$

с мультипликативными $\varphi(n)$, то во многих случаях это же можно констатировать относительно коэффициентов для ряда $A_{\rho,k,k}(f(\tau),\ f(\tau))$. Более того, коэффициенты ряда

$$A_{\rho,k,k}(f(\tau),\ f(\tau))=C_1\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\,e^{\frac{2\pi i\tau n}{N}}$$

удовлетворяют следующему правилу умножения:

$$\psi(n)\,\psi(m)=\sum_{d/(m,\,n)}\psi\left(\frac{mn}{d^2}\right)\varepsilon(d),$$

где $\varepsilon(d)$ — некоторая мультипликативная функция.

Г. А. Ломадзе (*Тбилиси*). **О представлении чисел суммами обобщенных полигональных чисел.** В докладе даны достаточные условия справедливости следующих тождеств, имеющих тесную связь с числом представлений целых чисел суммами обобщенных полигональных чисел (именно пентагональных и октагональных):

$$\vartheta_{00}^{s}(\tau;\ -1{,}6)=\sum_{\substack{M=1\\ M\equiv s\,(\mathrm{mod}\ 12)}}^{\infty}\rho_s(M)\,Q^M+\sum_{t=1}^{\lambda}A_s^{(t)}\vartheta_{00}^{s-4t}(\tau;\ -1{,}6)\,\vartheta_{01}^{4t}(\tau;\ -1{,}6)+$$

$$+\sum_{t=1}^{l}B_s^{(t)}\vartheta_{00}^{s-24t}(\tau;\ -1{,}6)\,\vartheta_{20}^{12t}(\tau;\ -1{,}6)\,\vartheta_{21}^{12t}(\tau;\ -1{,}6),$$

$$\vartheta_{00}^{s}(\tau;\ -2{,}6)=\sum_{\substack{M=1\\ M\equiv 4s\,(\mathrm{mod}\ 12)}}^{\infty}\rho_s(M)\,Q^M+\sum_{t=1}^{\lambda}A_s^{(t)}\vartheta_{00}^{s-4t}(\tau;\ -2{,}6)\,\vartheta_{21}^{4t}(\tau;\ -2{,}6),$$

где τ — комплексная переменная с $I\tau>0$, ϑ_{gh} — обобщенные тэта-функции, s — натуральное число $\geqslant 3$, $\rho_s(M)$ — сингулярный ряд проблемы, $Q=e^{\frac{\pi i\tau M}{6}}$, $\lambda=\left[\frac{s-1}{3}\right]$, $l=\left[\frac{s-1}{24}\right]$, $A_s^{(t)}$ и $B_s^{(t)}$ — постоянные.

Далее показано, что эти тождества справедливы при $s=4$, 5, 6 и 7. При $s=3$ они были доказаны Штрефкерком в 1943 г.; в этом случае суммы по t справа отсутствуют.

А. В. Малышев (*Ленинград*). **Асимптотическое распределение целых точек на некоторых эллипсоидах.** Рассматривается вопрос о представлении чисел положительными тернарными квадратичными формами. Доказана

Теорема. Пусть $f(x,\ y,\ z)$ — положительная тернарная целочисленная собственно примитивная квадратичная форма нечетных инвариантов $[\Omega,\ 1]$, принадлежащая роду $\mathfrak{G}[\Omega,\ 1]$ с характерами $\left(\frac{-f}{p}\right)=1$ для всех простых $p\setminus\Omega$. Пусть g — целое нечетное число с условием $g\Omega\neq 1$. Наконец, пусть $\mathfrak{C}_{f,\lambda}$ — коническая область с вершиной в начале координат и f-эллиптическим телесным углом $\lambda>0$. (Мы говорим, что конус $\mathfrak{C}_{f,\lambda}$ имеет f-эллиптический телесный угол λ, если в результате линейного преобразования, переводящего f в $x^2+y^2+z^2$, этот конус преобразуется в конус с обычным телесным углом λ).

Рассмотрим целое число m, взаимно простое с Ωg, и целые числа x_0, y_0, z_0, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0,\ y_0,\ z_0)\equiv m\,(\mathrm{mod}\ 8\Omega g),\ \text{о. н. д.}\ (x_0,\ y_0,\ z_0,\ 2)=1\\ \left(\frac{-m}{q}\right)=1\ \text{для всех простых}\ q\setminus g. \end{array}\right\}\qquad (1)$$

Обозначим через $t(f, \lambda, g; m)$ количество целых примитивных точек (x, y, z) эллипсоида $f(x, y, z) = m$, лежащих в конусе $\mathfrak{C}_{f,\lambda}$ и сравнимых с (x_0, y_0, z_0) по модулю g. Тогда при $m \to \infty$ и фиксированных f, λ, g:

$$t(f, \lambda, g; m) \sim \frac{\lambda}{4\pi} \frac{2^k}{\Omega g^2 \prod\limits_{p \setminus \Omega g} \left(1 + \frac{1}{p}\right)} t(m), \tag{2}$$

где $t(m)$ — количество примитивных представлений числа m суммой трех квадратов, а k — количество простых делителей Ω, не входящих в g.

Иначе говоря, представления числа m рядом $\mathfrak{G}_{[\Omega, 1]}$ асимптотически равномерно разбиваются по классам этого рода, причем представления числа m отдельной формой f асимптотически равномерно распределены как по поверхности эллипсоида $f(x, y, z) = m$, так и по модулю g.

Оценка (2) есть уточнение оценки статьи [3]. Частные случаи теоремы включают в себя результат заметок [1] и [2].

Лит.: 1. Малышев А. В., ДАН СССР 93, (1953), 771—774. 2. Линник Ю. В., ДАН СССР 96, (1954), 909—912. 3. Малышев А. В., Вестник ЛГУ, (1956).

А. И. Попов (*Ленинград*). **К теории ультрапоказательной функции Г. Ф. Вороного.** 1. Г. Ф. Вороной впервые ввел в теорию чисел сумматорные формулы, содержащие цилиндрические функции, одну из которых (функцию Макдональда нулевого порядка) он называл «ультрапоказательной функцией второго ранга».

Из опубликованных рукописей Вороного видно, что он рассматривал подобные функции любого ранга в форме

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Gamma^m(s)}{x^s} ds, \tag{1}$$

где m — целое положительное, $x > 0$, $c > 0$, $R(s) > 0$ (см. [1]).

2. Можно построить теорию функций, подобных (1), с помощью соответствующего дифференциального уравнения, одним из частных решений которого является ультрапоказательная функция Вороного m-го ранга.

3. Рассматриваемые функции играют большую роль в изучении сумм $\sum\limits_{n<x} \tau_m(n)$, где $\tau_m(n)$ определяются равенством (для $R(s) > 1$):

$$[\zeta(s)]^m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_m(n)}{n^s}.$$

Вследствие наличия тождеств, связывающих суммы $\sum\limits_{n \leqslant x} \tau_m(n)$ с функцией

$$f(x) = \pi(x) + \frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{x}\right) + \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt[3]{x}\right) + \ldots,$$

где $\pi(x)$ — число простых чисел в заданных пределах, обобщенные ультрапоказательные функции имеют значение и при изучении распределения простых чисел.

Лит.: 1. Вороной Г. Ф., Собр. соч., т. III, Киев, 1953.

А. Г. Постников (*Москва*). **Аддитивные задачи с растущим числом слагаемых.** Пусть $f(x)$ — функция, принимающая при целых значениях x целые значения. Задача о числе представлений целого N в виде

$$f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n) = N,$$

когда $0 \leqslant x_i \leqslant P$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (P — натуральное число) и $n \to \infty$, может рассматриваться как задача теории вероятностей. Если P фиксировано, то задача решается с помощью локальной предельной теоремы теории вероятностей. Мы рассматриваем два частных случая: $f(x)=x$ и $f(x)=x^2$, но решаем их и тогда, когда P может и расти с ростом n. Решение задач требует оценок тригонометрических сумм соответственно

$$\sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i\alpha x} \quad \text{и} \quad \sum_{x=0}^{P} e^{2\pi i\alpha x^2}.$$

Имеют место теоремы.

Теорема 1. Пусть $r_{n,P}(N)$ обозначает число решений диофантова уравнения

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=N$$

в числах $0\leqslant x_i\leqslant P$, $i=1, 2, \ldots, n$. Существует такая постоянная $K>1$, что при $P\leqslant K^n$ равномерно относительно целых N имеет место формула

$$r_{n,P}(N)=\frac{(P+1)^n}{\sqrt{\pi n\frac{P^2+2P}{6}}}e^{-\frac{\left(N-n\frac{P}{2}\right)^2}{n\frac{P^2+2P}{6}}}+O\left(\frac{(P+1)^{n-1}}{n}\right).$$

Теорема 2. Пусть $r_{n,P}(N)$ обозначает число решений диофантова уравнения

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=N$$

в числах $0\leqslant x_i\leqslant P\leqslant K^n$, $i=1, 2, \ldots, n$, K — константа >1.

Равномерно относительно целых N имеет место асимптотическая формула

$$r_{n,P}(N)=\frac{(P+1)^n}{\sqrt{\pi n\frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{90}}}e^{-\frac{\left(N-n\frac{P(2P+1)}{6}\right)^2}{n\frac{P(P+2)(2P+1)(8P-3)}{90}}}+$$

$$+O\left(\frac{(P+1)^{n-2}}{n}\right).$$

А. Г. Постников (*Москва*). **Показательная тригонометрическая сумма.** Пусть g — целое рациональное число $\geqslant 2$, α — вещественное число $0\leqslant\alpha<1$. Рассмотрим g-ичное разложение числа α:

$$\alpha=\frac{a_1}{g}+\frac{a_2}{g^2}+\ldots+\frac{a_n}{g^n}+\ldots$$

Пусть s и λ — два натуральных числа. Распишем строчку из $\lambda+s-1$ первых знаков α нижеследующим способом:

$$(a_1a_2\ldots a_s)(a_2a_3\ldots a_{s+1})\ldots(a_\lambda a_{\lambda+1}\ldots a_{\lambda+s-1}).$$

Назовем последовательность этих скобок λ-членной гусеницей (ранга s) числа α. Методом И. М. Виноградова доказывается нижеследующая теорема:

Теорема: Пусть P — растущее натуральное число и

$$s=\left[\frac{1}{2}\frac{\log\frac{P}{\log^2 P}}{\log g}\right],\qquad P=sf+q,\qquad 0\leqslant q<s.$$

Разобьем интервал $(0,1)$ на равные части длиной $\frac{1}{g^{sf+s-1}}$ (α, лежащие на одной такой части, имеют одинаковыми первые $s+sf-1$ g-ичных знаков и поэтому одинаковую sf-членную гусеницу ранга s). Разобьем интервалы на два класса: к 1-му отнесем те интервалы, где наиболее часто встречающаяся скобка в sf-членной гусенице (ранга s) встречается более $\frac{sf}{g^s}s$ раз, во 2-й отнесем оставшиеся интервалы. Совокупность интервалов 1-го класса обозначим через $\mathfrak{M}_1$, совокупность интервалов 2-го класса — через $\mathfrak{M}_2$. Тогда:

1) если $\alpha \in \mathfrak{M}_2$, то

$$\left| \sum_{x=0}^{P-1} e^{2\pi i m \alpha g^x} \right| \leqslant k(\varepsilon) \frac{P}{\log^{\frac{1}{2}-\varepsilon} P};$$

2) $\operatorname{mes} \mathfrak{M}_1 = O(e^{-c \log^3 P})$, где $c > 0$ постоянная.

А. Г. Постников (*Москва*). **Рекуррентные соотношения между диофантовыми неравенствами в поле степенных рядов.** Рассматриваются степенные ряды от x с коэффициентами из некоторого поля k; в ряде допускается конечное число членов с отрицательными степенями x

$$\omega(x) = \sum_{n=-l}^{\infty} a_n x^n.$$

Такие ряды образуют поле. Элементы поля k будем называть константами. Каждому такому ряду сопоставим целое число — порядок этого ряда, равный показателю степени x, с которой начинается ряд с обратным знаком $\| \omega(x) \| = l$. Нижеследующая лемма аналогична общеизвестной лемме Дирихле из теории диофантовых приближений и доказывается весьма просто.

Лемма. Пусть имеются два степенных ряда $\omega_1(x)$ и $\omega_2(x)$ с коэффициентами из поля k. Какие бы ни были натуральные числа n и m, найдутся многочлены от $\frac{1}{x}$: $P\left(\frac{1}{x}\right)$, $Q\left(\frac{1}{x}\right)$ и $R\left(\frac{1}{x}\right)$, не равные тождественно нулю, такие, что

$$\left\| P\left(\frac{1}{x}\right) \right\| \leqslant m, \quad \left\| Q\left(\frac{1}{x}\right) \right\| \leqslant n,$$

$$\left\| P\left(\frac{1}{x}\right) \omega_1(x) + Q\left(\frac{1}{x}\right) \omega_2(x) - R\left(\frac{1}{x}\right) \right\| \leqslant -m-n-1.$$

Эти многочлены можно подобрать так, чтобы $\left\| P\left(\frac{1}{x}\right) \right\| = m$ или чтобы $\left\| Q\left(\frac{1}{x}\right) \right\| = n$.

Имеет место теорема, числовой аналог которой неизвестен.

Теорема. Пусть имеются два степенных ряда

$$\omega_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \text{ и } \omega_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k$$

с коэффициентами из поля k. Предположим, что определители

$$a_1,\ b_1,\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & b_1 \\ a_2 & a_3 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 & b_3 \\ a_3 & b_3 & b_4 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ b_3 & b_4 & b_5 \end{vmatrix},\ \ldots$$

отличны от нуля. Пусть многочлены от $\frac{1}{x}$: $P_{ij}\left(\frac{1}{x}\right)$, $Q_{ij}\left(\frac{1}{x}\right)$, $R_{ij}\left(\frac{1}{x}\right)$ (при заданной системе индексов не тождественные нулю) удовлетворяют системе неравенств:

$$\left\| P_{m,n}\left(\frac{1}{x}\right) \right\| \leqslant m, \quad \left\| Q_{m,n}\left(\frac{1}{x}\right) \right\| \leqslant n,$$

$$\left\| P_{m,n}\left(\frac{1}{x}\right)\omega_1(x)+Q_{m,n}\left(\frac{1}{x}\right)\omega_2(x)-R_{m,n}\left(\frac{1}{x}\right)\right\| \leqslant -m-n-1,$$

$$\left\| P_{m-1,n}\left(\frac{1}{x}\right)\right\| \leqslant m-1, \quad \left\| Q_{m-1,n}\left(\frac{1}{x}\right)\right\| = n,$$

$$\left\| P_{m-1,n}\left(\frac{1}{x}\right)\omega_1(x)+Q_{m-1,n}\left(\frac{1}{x}\right)\omega_2(x)-R_{m-1,n}\left(\frac{1}{x}\right)\right\| \leqslant -m-n,$$

$$\left\| P_{m-1,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right\| = m-1, \quad \left\| Q_{m-1,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right\| \leqslant n-1,$$

$$\left\| P_{m-1,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\omega_1(x)+Q_{m-1,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\omega_2(x)-R_{m-1,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right\| \leqslant -m-n+1,$$

$$\left\| P_{m-2,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right\| \leqslant m-2, \quad \left\| Q_{m-2,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right\| \leqslant n-1,$$

$$\left\| P_{m-2,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\omega_1(x)+Q_{m-2,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\omega_2(x)-R_{m-2,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right\| \leqslant -m-n+2.$$

Существуют такие четыре константы a, b, c, λ, что справедливы нижеследующие рекурентные соотношения:

$$P_{m,n}\left(\frac{1}{x}\right)=\left(a\frac{1}{x}+b\right)P_{m-1,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)+cP_{m-1,n}\left(\frac{1}{x}\right)+\lambda P_{m-2,n-1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$Q_{m,n}\left(\frac{1}{x}\right)=\left(a\frac{1}{x}+b\right)Q_{m-1,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)+cQ_{m-1,n}\left(\frac{1}{x}\right)+\lambda Q_{m-2,n-1}\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$R_{m,n}\left(\frac{1}{x}\right)=\left(a\frac{1}{x}+b\right)R_{m-1,n-1}\left(\frac{1}{x}\right)+cR_{m-1,n}\left(\frac{1}{x}\right)+\lambda R_{m-2,n-1}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Аналогичное соотношение можно вывести между многочленами с индексами (m, n), $(m-1, n-1)$, $(m, n-1)$, $(m-1, n-2)$.

А. Г. Постников (*Москва*). **Об L-рядах по модулю, равному степени простого числа.** Основываясь на том, что для $\operatorname{ind}(1+pu)$ (где индекс рассматривается по модулю p^n) можно написать ряд, аналогичный классическому логарифмическому ряду для $\log(1+x)$, при помощи оценок И. М. Виноградова доказываем нижеследующую теорему.

Теорема. Пусть $\chi(k)$ — первообразный характер по модулю p^n. При $l \geqslant p^2$ и $n \geqslant n_0$

$$\left|\sum_{k=N}^{N+l-1}\chi(k)\right| \leqslant e^{c_0 n(\log n)^2}\, p^{\frac{c_1}{n^3\log n}}\, l^{1-\frac{c_1}{n^3\log n}}$$

(c_0 и c_1 — положительные постоянные).

Эта теорема находит применение в теории L-рядов Дирихле.

Теорема. Пусть $D=p^n$, χ — первообразный характер по модулю $D=p^n$ и $n^Q \geqslant \log p \geqslant c_1 n^4(\log n)^3$, $n \geqslant n_0$, не имеет нулей в области

$$\sigma > 1-\frac{c_2}{\log^{\frac{Q}{Q+1}} D\log\log D}, \quad |t| \leqslant c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные.

К. А. Родосский (*Саратов*). **К вопросу о распределении простых чисел в коротких арифметических прогрессиях.** Пусть $(D, l)=1$ и $\psi(x, D, l) = \sum_{n\leqslant x,\ n\equiv l(\mathrm{mod}\, D)} \Lambda(n)$ есть функция Чебышева.

Теорема. При $14 \ln D \leqslant \ln x \leqslant \ln^3 D$ существуют такие абсолютные положительные постоянные A_1 и A_2 (их можно оценить), что имеет место оценка:

$$\left| \psi(x, D, l) - \frac{x}{\varphi(D)} \left\{ 1 - E(D)\, \tilde{\chi}(l)\, \tilde{\beta}^{-1} x^{\tilde{\beta}-1} \right\} \right| <$$

$$< A_1 \frac{x}{\varphi(D)} \left\{ \ln^{12} D \cdot \left(\frac{eA_2}{\delta_0 \ln D} \right)^{-A_2 \cdot \frac{\ln x}{\ln D}} + \frac{1}{D} \right\},$$

где $\tilde{\beta}$ есть наибольший действительный нуль (исключительный нуль) функции $L(s, \tilde{\chi})$ с действительным характером $\tilde{\chi}$ по модулю D и

$$E(D) = 1, \quad \delta_0 = 1 - \tilde{\beta}, \qquad \text{если } 1 - \tilde{\beta} \leqslant A_2 \ln^{-1} D,$$

$$E(D) = 0, \quad \delta_0 = A_2 \ln^{-1} D, \text{ если } 1 - \tilde{\beta} > A_2 \ln^{-1} D.$$

Доказательство основывается на двух фактах:

1. Число нулей всех L-функций с характерами по модулю D, которые могут быть в прямоугольнике $\Delta \leqslant \vartheta \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$ ($\Delta \in [0,9;\ 1]$), не очень велико.

2. Существование исключительного нуля по $\operatorname{mod} D$ влечет за собою улучшение правой границы расположения остальных нулей всех L-функций с характерами по модулю D.

Лит.: 1. Родосский К. А., Матем. сб., 36 (78) : 2, (1955).

Н. П. Романов (*Ташкент*). **Асимптотика степенных рядов на границе круга сходимости и предельные теоремы теории чисел.** Известные построения мероморфной функции по главным частям полюсов (теорема Миттаг-Леффлера) и в некотором смысле обратная задача разложения мероморфной функции на простейшие дроби имеют аналоги в поведении степенных рядов на границе круга сходимости. В роли полюсов при этом фигурируют те «рациональные» точки единичной окружности (т. е. точки вида $\exp(2\pi i R)$, где R рационально), при радиальном приближении x к которым рассматриваемая функция $f(x)$ неограниченно возрастает, а аналогом главной части является асимптотическая характеристика функции при радиальном приближении независимого переменного к «рациональной» точке.

Эти построения относятся только к специальным рядам арифметического характера, однако класс этих рядов очень широк. В него входят многие ряды, связанные с теорией модулярных функций, в частности ряды Эйзенштейна и ряды для якобиевых тэта-функций и их степеней, в него входят все сингулярные ряды всех аддитивных проблем из исследований Рамануджана—Харди и Литтльвуда; в него входят также ряды, построенные докладчиком при помощи специальных тождеств и при помощи построений, аналогичных построению Миттаг-Леффлера.

Все указанные функции, кроме степенного разложения, обладают разложением на «простейшие дроби» вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sum_{\omega(n)} \frac{a(\omega)}{(x-\omega)^p},$$

где $\sum\limits_{\omega(n)}$ означает, что суммирование происходит по всем примитивным корням n-й степени из единицы. Это разложение используется в работах докладчика [1], [2] двумя способами: либо по асимптотике функции в рациональных точках находятся b_n, либо по разложению находится указанная асимптотика.

Вопросы асимптотики степенных рядов в окрестности «рациональных» точек единичной окружности играют основную роль в методе Рамануджана [3] в аддитивной теории чисел. Эти вопросы в работах докладчика используются не только в плане аддитивных проблем, но главным образом для получения других разнообразных предельных теорем теории чисел. При этом систематически используются тауберовские теоремы, связывающие асимптотику сумм вида $\sum\limits_{\substack{n \leqslant N \\ n \equiv l \pmod{k}}} a_n$ с асимптотикой функции $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ при приближении x к «рациональным» точкам единичной окружности.

Лит.: 1. Романов Н. П., Матем. сб., 23 (65) : 2, (1948). 2. Романов Н. П., Труды Среднеазиатск. гос. унив., вып. 37, (1954). 3. Ramanujan, Proc. Lond. Math. Soc., XVII, 2, (1918), 75—115.

Н. П. Романов (*Ташкент*). **Операторные методы в теории чисел.** Многие факты и соотношения теории чисел могут быть легко и удобно выражены в операторной форме. Так, оператор, обратный к оператору суммирования $\zeta f(x)=\sum_{n\leq x} f\left(\frac{x}{n}\right)$, имеет вид

$$\zeta^{-1} f(x)=\sum_{n\leq x} \mu(n)\, f\left(\frac{x}{n}\right)$$

и содержит функцию Мебиуса $\mu(n)$, связь которой с глубокими проблемами теории чисел общеизвестна.

Аналогия между числами и операторами, играющая столь большую роль в современной математике, должна быть так же широко применена и в теории чисел.

Операторные принципы (хотя и без операторной терминологии) фактически лежат в основе ряда результатов П. Л. Чебышева (см. [1], стр. 229), в частности, тех, при помощи которых получены знаменитые неравенства Чебышева ([2], стр. 191). Простой и естественный операторный смысл приобретают в рассматриваемой здесь символике формулы обращения Бахмана ([3], стр. 310—311). Вопросы связи между теорией чисел и операторной символикой развивал систематически Л. Г. Шнирельман в своих неопубликованных работах. Операторные методы содержатся, по существу, в рассуждениях, лежащих в основе элементарного доказательства теоремы Адамара, данного А. Сельбергом [4]. Связь новых элементарных методов теории чисел с операционным исчислением рассматривается также в работах Г. Шапиро [5], Н. П. Романова [6] и в работе А. Г. Постникова и Н. П. Романова [7]. В наиболее общей форме указанные операторные аналогии проявляются при рассмотрении рядов вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_n}{n^s}$, где L_n — линейные операторы, удовлетворяющие условию $L_n L_m = L_{mn}$ (M — свойство). В таком виде, на основе теории однопараметрических операторных групп, была развита Н. П. Романовым [8] теория операторных рядов Дирихле.

В докладе изложены также последние результаты, полученные автором, в которых теорема Адамара является прямым следствием из одной весьма общей и элементарно доказываемой теоремы типа Таубера. Другие вопросы связи между теорией чисел и функциональным анализом возникают при рассмотрении ортогонализации последовательностей элементов гильбертова пространства, обладающих D-свойством. Под D-свойством последовательности $f_1, f_2, f_3, \ldots$ подразумевается свойство $(f_n, f_m)=g((n, m))$; скалярное произведение (f_n, f_m) зависит только от общего наибольшего делителя n и m. Основой этого исследования является факт совпадения для этих последовательностей процесса ортогонализации по Шмидту с процессом обращения Мебиуса. При этом получаются теорема Франеля, разнообразные обобщения этой теоремы и различные арифметические тождества.

Лит.: Чебышев П. Л., Полное собр. соч., т. 1, 1944. 2. Чебышев П. Л., Полное собр. соч., т. 1, 1944. 3. Bachmann P., Zahlentheorie, Bd. II, Leipzig, 1894. 4. Selberg A., Ann. of Math., V. 50, № 2, (1949). 5. Schapiro H., Ann. of Math., V. 51, (1951). 6. Романов Н. П., Труды Среднеазиатск. гос. унив., вып. 54, (1954). 7. Постников А. Г., Романов Н. П., Успехи матем. наук, т. X, вып. 4 (66), (1955). 8. Романов Н. П., Изв. НИИММ Томск. гос. унив., (1947). 9. Романов Н. П., Изв. АН СССР, сер. матем., 10, (1946), 3—34 и 15, (1951), 131—152.

Г. А. Фрейман (*Казань*). **Об одном элементарном методе в теории чисел и теории вероятностей.** Пусть задана монотонно возрастающая последовательность положительных чисел

$$a_1, a_2, \ldots, a_r, \ldots (a_1 > 0,\ a_{r+1} \geqslant a_r). \tag{1}$$

Обозначим через $q(n)$ число решений неравенства

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 + \ldots + a_r n_r + \ldots \leqslant n, \tag{2}$$

где n_i — любые целые неотрицательные числа.

Пусть $q_r(n)$ — число решений неравенства (2), если $n_i = 0$ при $i > r$. Пусть $p(n)$ и $p_r(n)$ определяются соотношениями

$$p(n) = \frac{q(n) - q(n-h)}{h}, \quad p_r(n) = \frac{q_r(n) - q_r(n-h)}{h},$$

где h — фиксированное положительное число, равное одному из чисел a_i.

Пусть числа a_i удовлетворяют условиям:

$$\text{I.}\ \frac{a_{r+1} - a_r}{a_r} < \frac{C}{r^{1-\alpha}},$$

где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, C — положительная постоянная;

$$\text{II.}\ \frac{a_z}{a_r} > \varphi\left(\frac{z}{r}\right) \log \frac{z}{r}$$

при $z > r$, где $\varphi(u) \to +\infty$ при $u \to +\infty$.

Определим функцию a_z при $z \geqslant 0$, полагая $a_0 = 0$, $a_z = a_r$, при $z = r$, $r = 1, 2, \ldots$, и считая функцию a_z на каждом из отрезков $[r, r+1]$, $r = 0, 1, \ldots$ линейной.

Имеет место формула

$$p(n) = \frac{eE}{\sqrt{2\pi\sigma I}}\, e^{T_1}\left(1 + O(r_0^{-\theta})\right),$$

где

$$T_1 = n\sigma - \int_1^\infty \log(1 - e^{-\sigma a_z})\, dz,$$

σ и r_0 определяются равенствами

$$n = \int_1^\infty \frac{a_z\, dz}{e^{\sigma a_z} - 1}, \qquad r_1^3 a_{r_0} = n,$$

величины I и E имеют вид:

$$I = \int_1^\infty \frac{a_z^2 e^{\sigma a_z}\, dz}{(e^{\sigma a_z} - 1)^2},$$

$$E = \lim_{x \to \infty} \left\{ \int_1^x \log a_z\, dz - \sum_{r=1}^{x-1} \log a_r - \frac{1}{2} \log a_x \right\},$$

θ — положительная постоянная, зависящая от величины α и вида функции $\varphi(u)$.

Доказательство проведено с помощью соотношения

$$p_{r+1}(n) = p_r(n) + p_r(n - a_{r+1}) + p_r(n - 2a_{r+1}) + \ldots$$

Путем рассмотрения соответствующих рекурентных соотношений доказаны, почти при тех же условиях, локальные предельные теоремы Гнеденко и Прохорова, полученные первоначально аналитическим методом.

Н. Г. Чудаков (*Саратов*). **Классификация характеров числовых полугрупп.** 1. Проблема классификации характеров числовых полугрупп возникла в связи с попытками найти класс характеров, которые по своим свойствам были бы особенно близки к классическим характерам Дирихле. В докладе дается обзор работ в этом направлении за период 1949—1956 гг.

В течение последнего пятилетия ряд авторов занимался исследованием одного такого класса характеров, которые были названы обобщенными характерами Дирихле. Они определяются условием, что соответствующие им сумматорные функции всюду ограничены.

Был намечен общий метод исследования характеров полугрупп с конечной базой (Чудаков Н. Г., Линник Ю. В., 1950 г.).

Этот метод состоит в том, что исследуемая проблема связывается с теорией аппроксимации иррациональностей, причем это сближение двух теорий было качественно осуществлено через ряды типа Фурье для соответствующей L-функции (однако оказалось, что интеграл Фурье дает возможность получить точные количественные оценки). В результате указанных исследований оказалось, что обобщенных характеров для полугрупп с конечными базами нет, а затем то же самое было установлено и для достаточно «редких» баз (Бредихин Б. М., 1953 г.).

2. С другой стороны, было показано (Чудаков Н. Г., 1953 г.), что обобщенные характеры существуют для «плотных» баз, причем они не могут быть получены в результате «искажения» характеров Дирихле на конечном числе элементов базы (Бронштейн Б. С., 1954 г.). Вопрос о том, какова должна быть плотность базы, для которой существует обобщенный характер, является предметом исследований в настоящее время (Чудаков, Бредихин).

3. Особенно важным с арифметической точки зрения является так называемый конечный гомоморфизм, т. е. гомоморфное отображение натурального ряда в конечное числовое множество. Конечный гомоморфизм наиболее близок по своим свойствам к характеру Дирихле, и для него может быть развита теория L-функций, аналогичная классической. Здесь получены отдельные результаты «плотностного» типа, так как множество конечных гомоморфизмов образует компактную топологическую группу.

А. Б. Шидловский (*Москва*). **Об одном классе трансцендентных чисел.** В 1929 г. К. Зигель [1] опубликовал метод, который позволял устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений в алгебраических точках одного класса целых функций.

Зигель называет целую функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

E = функцией, если: 1) все коэффициенты C_n функции $f(z)$ принадлежат к алгебраическому полю K — конечной степени над полем рациональных чисел, 2) модули коэффициентов C_n и всех их сопряженных растут медленнее сколь угодно малой положительной степени n^n, 3) существует последовательность натуральных чисел $\{q_n\}$, растущая медленнее сколь угодно малой положительной степени n^n, такая, что числа $q_n C_k$, $k = 0, \ldots, n$, — целые алгебраические.

Метод Зигеля может быть применен к классу E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям, коэффициенты которых — рациональные функции от z с алгебраическими коэффициентами, и является непосредственным обобщением известных идей и результатов Эрмита и Линдемана.

В 1949 г. Зигель [2] изложил свой метод в форме общей теоремы об алгебраической независимости значений E-функций при алгебраических значениях аргумента, удовлетворяющих системе линейных однородных дифференциальных уравнений. Условия, при которых доказана эта теорема, являющиеся лишь достаточными, накладывают слишком тяжелые ограничения на рассматриваемые функции. Поэтому, несмотря на внешне общую форму теоремы Зигеля, она могла найти лишь весьма узкий круг приложений, не выходящий за пределы функций, являющихся решениями дифференциальных уравнений 2-го порядка.

В ряде статей [4] автор доклада сначала установил теорему Зигеля при менее стеснительных предположениях и распространил ее на случай системы неоднородных дифференциальных уравнений, затем нашел необходимые и достаточные условия этой теоремы и, наконец, доказал теорему, решающую до конца вопрос о трансцендентности и алгебраической независимости значений в алгебраических точках E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям. Ниже формулируются последняя теорема и следствия из нее.

Основная теорема. Пусть совокупность E-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ является решением системы из m линейных дифференциальных уравнений первого порядка,

$$y_k' = Q_{k,0}(z) + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}(z)\, y_i, \qquad k = 1, \ldots, m,$$

коэффициенты которых $Q_{k,i}(z)$, $k = 1, \ldots, m$, $i = 0, \ldots, m$, — рациональные функции от z с алгебраическими коэффициентами, а α — любое алгебраическое число, отличное от нуля и полюсов всех функций $Q_{k,i}(z)$.

Тогда для того чтобы l чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_l(\alpha)$, $1 \leqslant l \leqslant m$, были алгебраически независимыми, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(z), \ldots, f_l(z)$ были алгебраически независимыми над полем рациональных функций от z. В частности, число $f_k(\alpha)$, $1 \leqslant k \leqslant m$, трансцендентно, если трансцендентна соответствующая функция $f_k(z)$.

Частным случаем этой теоремы является следующая

Теорема 1. Пусть E-функция $f(z)$ является решением линейного дифференциального уравнения порядка m,

$$P_m(z)\, y^m + \ldots + P_1(z)\, y' + P_0(z)\, y = Q(z),$$

коэффициенты которого $P_i(z)$, $i = 0, \ldots, m$, и $Q(z)$ — многочлены от z с алгебраическими числовыми коэффициентами, а α — любое алгебраическое число, отличное от нуля и нулей многочлена $P_m(z)$.

Тогда для того чтобы l чисел $f^{(k)}(\alpha)$, $k = 0, \ldots, l-1$, $1 \leqslant l \leqslant m$, были алгебраически независимыми, необходимо и достаточно, чтобы функции $f^{(k)}(z)$, $k = 0, \ldots, l-1$, были алгебраически независимыми над полем рациональных функций от z. В частности, каждое из чисел $f^{(k)}(\alpha)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, трансцендентно, если трансцендентна функция $f(z)$.

Можно указать достаточно широкий класс E-функций, к которым применимы наши теоремы. Положим

$$[\lambda, 0] = 1, \qquad [\lambda, n] = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1), \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и рассмотрим целые функции

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mu_1, n]\ldots[\mu_k, n]}{[\lambda_1, n]\ldots[\lambda_m, n]}\, z^{tn}, \qquad \lambda \neq 0, \ -1, -2, \ldots,$$

где $\mu_1, \ldots, \mu_k : \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — рациональные числа, причем $m - k = t > 0$. Определенные таким образом E-функции Зигель назвал гипергеометрическими E-функциями. Из теоремы 1 следует

Теорема 2. Всякая гипергеометрическая E-функция и все ее производные в любой алгебраической точке, отличной от нуля, принимают трансцендентные значения.

Применение основной теоремы к доказательству алгебраической независимости значений конкретных E-функций не представляет теперь тех трудностей, как в случае теоремы Зигеля, и практически всегда возможно. Автором доказан ряд предложений об алгебраической независимости значений E-функций, являющихся решениями дифференциальных уравнений произвольных порядков.

Лит.: 1. Siegel K., Abh. Preuss. Acad. Wiss., № 1, 70 (1929—1930). 2. Siegel K., Transcendental numbers, Princeton, 1949. 3. Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952. 4. Шидловский А. Б., ДАН СССР **96**, № 4, (1954); ДАН СССР, **100**, № 2, (1955); ДАН СССР, **103**, № 6, (1955); ДАН СССР **105**, № 1, (1955); ДАН СССР **106**, № 3, (1956).

СЕКЦИЯ АЛГЕБРЫ

С. П. Азлецкий (*Свердловск*). **Системы силовских классов и некоторые вопросы теории конечных групп.** Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная группа. Множество всех силовских подгрупп p_i данного порядка группы $\mathfrak{G}$ называется силовским классом группы $\mathfrak{G}$. Множество силовских классов группы $\mathfrak{G}$, порождающее ее и состоящее из наименьшего числа классов, называется минимальной системой силовских классов группы $\mathfrak{G}$, а число силовских классов, входящих в минимальную систему, — силовским рангом группы $\mathfrak{G}$ [1].

Произведенные автором исследования минимальных систем ([1], [2]) позволяют изучать свойства и строение некоторых классов конечных групп. Среди результатов, полученных в этом направлении, отмечаются следующие.

1. Факторизацию конечной группы $\mathfrak{G} : \mathfrak{G} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — собственные подгруппы группы $\mathfrak{G}$, будем называть полумаксимальной полуинвариантной факторизацией, если по крайней мере одна из подгрупп $\mathfrak{M}$ или $\mathfrak{H}$ группы $\mathfrak{G}$ является ее максимальной инвариантной подгруппой. Пусть порядок группы $\mathfrak{G}$ делится по крайней мере на два различных простых числа. Тогда, если $\mathfrak{G}$ имеет единственную минимальную систему и силовский ранг группы $r \geqslant 1$ или если $\mathfrak{G}$ имеет несколько минимальных систем и $r > 1$, $\mathfrak{G}$ допускает полумаксимальную полуинвариантную факторизацию: $\mathfrak{G} = \mathfrak{M}\mathfrak{H}$. При этом рассматриваются различные случаи, для каждого из которых уточняются множители факторизации $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$.

2. Дано описание 16 возможных типов (бесконечных серий) конечных групп с длиной главного ряда, равной двум, основанное на том, что силовский ранг группы не превосходит длины ее главного и композиционного ряда.

3. Исходя из понятий p-специальной группы (С. А. Чунихин) и группы с рассеиванием (О. Орэ), введены рассматриваемые здесь П-специальные группы и группы с сильным П-рассеиванием, где П — некоторое множество простых чисел. В частности, доказывается следующая теорема, представляющая аналог обращения известной теоремы С. А. Чунихина о П-разрешимых группах при некоторых ограничительных условиях: если всякому представлению порядка n группы $\mathfrak{G}$ в виде произведения двух взаимно простых множителей $n = a \cdot b$, где b — некоторый П-силовский делитель числа n, соответствуют подгруппы порядков a и b группы $\mathfrak{G}$, причем по крайней мере одна из этих подгрупп является инвариантной подгруппой группы $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}$ есть П-разрешимая группа. При этом справедливо следующее заключение: если группа $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условиям данной теоремы, то существуют такие множества П′ и П″, составленные из элементов множества П (причем одно из них, П′ или П″, может быть и пусто), сумма которых есть множество П и относительно одного из которых группа $\mathfrak{G}$ будет специальной, а относительно другого — группой с сильным рассеиванием.

4. Исследуется П-разрешимость группы с заданной минимальной системой силовских классов при различных предположениях относительно множества П, составленного из простых делителей порядка группы.

Лит.: 1. Азлецкий С. П., Матем. сб., т. 28 (70) : 2, (1951). 2. Азлецкий С. П., Матем. сб., т. 34 (76) : 2, (1954).

В. А. Андрунакиевич (*Москва*). **Ассоциативные кольца с минимальными двусторонними идеалами.** Хорошо известна роль минимальных правых идеалов в теории ассоциативных алгебр конечного ранга и ассоциативных колец с условием минимальности. Значение минимальных правых идеалов связано с тем простым фактом, что всякий такой идемпотентный идеал отщепляется в качестве прямого слагаемого из любого содержащего его правого идеала. Если же рассматривать идемпотентный минимальный двусторонний идеал, то он далеко не всегда выделяется прямым слагаемым. Этим, быть может, объясняется, что роль минимальных двусторонних идеалов для теории ассоциативных колец с условием минимальности лишь для двусторонних идеалов почти не рассматривалась. В настоящей работе делается попытка восполнить этот пробел.

Работа состоит из трех частей.

В первой части изучаются произвольные ассоциативные кольца, но рассматриваются лишь минимальные двусторонние идеалы с единицей, т. е. те идемпотентные минимальные двусторонние идеалы, которые всегда отщепляются в качестве прямого слагаемого. Доказываются следующие утверждения.

Теорема 1. Всякое кольцо K с условием минимальности для главных двусторонних идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы $K=E\dot{+}E^*$, где E — полупростое кольцо в смысле Брауна—Маккоя [1] (дискретная прямая сумма простых колец с единицей), а E^* — кольцо, не содержащее бирегулярных идеалов [2].

Теорема 2. Кольцо K с условием минимальности для всех двусторонних идеалов представимо единственным образом в виде прямой суммы $K=E\dot{+}E^*$, где E — полупростое кольцо (конечная прямая сумма простых колец с единицей), а E^* — кольцо, ограниченное радикалом Брауна—Маккоя.

Заметим, что теорема 2 обобщает аналогичную теорему М. Холла [3] для колец с условием минимальности для правых идеалов.

Во второй части анализируются свойства колец, в которых всякий идемпотентный минимальный двусторонний идеал отщепляется в качестве прямого слагаемого. Доказывается

Теорема 3. Кольцо с условием минимальности для главных двусторонних идеалов, в котором всякий идемпотентный минимальный двусторонний идеал отщепляется в качестве прямого слагаемого, представимо единственным образом в виде прямой суммы полупростого кольца в смысле Брауна—Маккоя (дискретная прямая сумма простых колец с единицей), присоединенно-простого кольца без нильпотентных идеалов (дискретная прямая сумма простых ненулевых колец без единицы) и кольца без f-регулярных идеалов [4].

В последнем разделе рассматриваются кольца, всякий гомоморфный образ которых не содержит f-регулярных идеалов. Такие кольца мы называем *антипростыми*, так как они совпадают с кольцами, всякий идеал которых гомоморфно не отображается на простые ненулевые кольца. Можно показать, что во всяком ассоциативном кольце существует единственный максимальный антипростой идеал R_2, который обладает обычными свойствами радикала. Радикал R_2 охватывает локально-нильпотентный радикал Левицкого [5] и содержится в радикале Брауна—Маккоя. В коммутативных кольцах радикал R_2 совпадает с радикалом Джекобсона [6]. Если в кольце выполнено условие минимальности для двусторонних идеалов, то R_2 — нильпотентен. Каждое R_2-полупростое кольцо является подпрямой суммой подпрямо-неприводимых колец с идемпотентной сердцевиной, и обратно.

Лит.: 1. Brown B., McCoy N. H., Amer. J. Math. **69**, (1947), 46—58. 2. Arens R. F., Kaplansky I., Trans. Amer. Math. **63**, (1948), 457—481. 3. Hall M., Trans. Amer. Math. Soc. **48**, (1940), 391—404. 4. Blair R. L., Trans. Amer. Math. Soc. **75**, (1953), 136—153. 5. Levitzki J., Bull. Amer. Math. Soc. **49**, (1949), 462—466. 6. Jacobson N., Amer. J. Math. **67**, (1945), 300—320.

В. В. Вагнер (*Саратов*). **Обобщенные груды и обобщенные группы.** Полугрудой называется множество K с заданной однозначной, всюду определенной тернарной алгебраической операцией, удовлетворяющей условиям

$$[[K_1K_2K_3]\,K_4K_5] = [K_1\,[K_4K_3K_2]\,K_5] = [K_1K_2[K_3K_4K_5]], \tag{1}$$

где через $[K_1K_2K_3]$ обозначается результат применения этой операции к упорядоченной тройке элементов (K_1, K_2, K_3).

Множество $\mathfrak{P}(A\times B)$ всех бинарных отношений между элементами множеств A и B является полугрудой относительно операции тройного умножения бинарных отношений

$$[\rho_1\rho_2\rho_3] = \rho_3 \circ \overset{-1}{\rho_2} \circ \rho_1. \tag{2}$$

Множество $\mathfrak{P}(A\times B)\times\mathfrak{P}(B\times A)$ всех упорядоченных пар бинарных отношений (ρ, σ), где $\rho\in\mathfrak{P}(A\times B)$ и $\sigma\in\mathfrak{P}(B\times A)$, является полугрудой относительно операции скрещенного тройного умножения пар бинарных отношений

$$[(\rho_1, \sigma_1)(\rho_2, \sigma_2)(\rho_3, \sigma_3)] = (\rho_3\circ\sigma_2\circ\rho_1,\ \sigma_1\circ\rho_2\circ\sigma_3). \tag{3}$$

Подполугрудами полугруды $\mathfrak{P}(A\times B)\times\mathfrak{P}(B\times A)$ являются подмножества $\mathfrak{F}(A\times B)\times\mathfrak{F}(B\times A)$ и $\mathfrak{F}_1(A\times B)\times\mathfrak{F}_1(B\times A)$, где $\mathfrak{F}(A\times B)$ обозначает множество всех частичных отображений A в B и $\mathfrak{F}_1(A\times B)$ — множество всех отображений A в B.

Преобразования $\lambda_{(k_1,k_2)}(k) = [kk_1k_2]$ и $\mu_{(k_1,k_2)}(k) = [k_2k_1k]$ полугруды K называются, соответственно, правым и левым сдвигами, определяемыми упорядоченной парой элементов (k_1, k_2). Пусть Λ — множество всех правых сдвигов, а M — множество всех левых сдвигов в данной полугруде K. Ставя в соответствие каждому элементу $k\in K$ упорядоченную пару отображений (φ_k, ψ_k), где $\varphi_k\in\mathfrak{F}_1((K\cup\mathrm{M})\times(K\cup\Lambda))$ и $\psi_k\in\mathfrak{F}_1((K\cup\Lambda)\times(K\cup\mathrm{M}))$ определяются формулами

$$\varphi_k(\bar{k}) = \lambda_{(k,\bar{k})}, \quad \varphi_k(\mu) = \mu(k), \quad \psi_k(\bar{k}) = \mu_{(k,\bar{k})}, \quad \psi_k(\lambda) = \lambda(k), \tag{4}$$

получаем гомоморфизм полугруды K в полугруду $\mathfrak{F}_1((K\cup\mathrm{M})\times(K\cup\Lambda))\times\times\mathfrak{F}_1((K\cup\Lambda)\times(K\cup\mathrm{M}))$, который называется каноническим скрещенным представлением полугруды K. В общем случае каноническое представление может оказаться несобственным, т. е. соответствующий гомоморфизм не будет изоморфизмом. Однако каждая полугруда может быть вмещена в полугруду, для которой каноническое скрещенное представление будет уже собственным. Отсюда следует, что для каждой полугруды существует собственное скрещенное представление. Полугруда K называется обобщенной грудой, если она бикоммутативна:

$$[[kk_1k_1]\,k_2k_2] = [[kk_2k_2]\,k_1k_1], \quad [k_1k_1\,[k_2k_2k]] = [k_2k_2\,[k_1k_1k]] \tag{5}$$

и идемпотентна

$$[kkk] = k. \tag{6}$$

Множество $\mathfrak{K}(A\times B)$ всех взаимно однозначных частичных отображений A в B является обобщенной грудой.

Теорема I. Если подполугруда θ полугруды $\mathfrak{F}(A\times B)\times\mathfrak{F}(B\times A)$ является обобщенной грудой, то отображение θ в обобщенную груду $\mathfrak{K}(A\times B)$, ставящее в соответствие каждой паре частичных отображений $(\varphi, \psi)\in\theta$ их пересечение $\varphi\cap\psi$, является изоморфизмом.

В силу того, что для каждой обобщенной груды ее каноническое скрещенное представление является собственным, из данной теоремы следует, что для каждой обобщенной груды существует собственное ее представление с помощью взаимно однозначных частичных отображений множества $K\cup\mathrm{M}$ в множество $K\cup\Lambda$.

Для любой обобщенной груды K бинарные алгебраические операции

$$k_1 \triangleright k_2 = [k_1k_1k_2], \quad k_1 \triangleleft k_2 = [k_1k_2k_2] \tag{7}$$

являются ассоциативными и идемпотентными. Множество K относительно этих операций называется первой, соответственно второй, ассоциированной полугруппой для данной обобщенной груды K. Если назвать псевдокоммутативной справа (слева) полугруппу, у которой коммутируют правые (левые) сдвиги, то первая ассоциированная полугруппа будет псевдокоммутативна слева, а вторая — псевдокоммутативна справа. В большинстве случаев основные вопросы теории обобщенных груд оказываются связанными со свойствами ассоциированных с нею полугрупп и сводятся к общей теории идемпотентных псевдокоммутативных справа или слева полугрупп. Как известно, каждая обобщенная группа G будет являться обобщенной грудой относительно тернарной алгебраической операции

$$[g_1 g_2 g_3] = g_1 g_2^{-1} g_3 \,. \tag{8}$$

Отсюда значительная часть теории обобщенных групп сводится к теории обобщенных груд. В частности, из теоремы I получается

Теорема II. Если подполугруппа Φ полугруппы $\mathfrak{J}(A \times A)$ является обобщенной группой, то отображение Φ в обобщенную группу $\mathfrak{K}(A \times A)$, ставящее в соответствие каждому частичному преобразованию $\varphi \in \Phi$ его пересечение $\varphi \cap \overset{-1}{\overline{\varphi^{-1}}}$ с обращением обобщенно обратного ему частичного преобразования φ^{-1}, является изоморфизмом.

Н. Я. Виленкин (*Москва*). **Теория топологических абелевых групп.** Доклад содержит обзор работ докладчика по теории топологических абелевых групп. Эти работы распадаются на три цикла. В первом из этих циклов было изучено понятие прямой суммы топологических абелевых групп с отмеченными подгруппами и получены теоремы о группах, являющихся прямыми суммами групп ранга 1 (конечных циклических групп, группы целых p-адических чисел, группы рациональных p-адических чисел и группы типа p^∞). При этом, кроме локально компактных групп, рассматривались другие, более широкие классы групп. Для этих классов групп строится теория характеров, обобщающая теорию характеров Л. С. Понтрягина. В работах этого цикла, кроме теорем, обобщающих теорию Прюфера счетных периодических абелевых групп, были получены результаты, обобщающие теорию Ульма для таких групп. Работы второго цикла посвящены изучению топологических абелевых групп с заданной ограниченностью. В них строятся предельные группы для прямых и обратных спектров топологических групп и устанавливаются соотношения между этими предельными группами. Дальнейшее развитие указанных идей привело к созданию понятия обобщенной подгруппы топологической группы. Наконец, в работах третьего цикла рассматриваются функции на топологических абелевых группах и некоторые свойства преобразования Фурье на топологических абелевых группах.

Б. З. Вулих (*Ленинград*). **Полуупорядоченные кольца.** Рассматриваются вопросы, связанные с превращением линейных полуупорядоченных множеств различных типов в обобщенные полуупорядоченные кольца (обобщение понимается в том смысле, что произведение может быть определено не для любой пары элементов; см. также [1] и [2]). Все рассматриваемые ниже кольца автоматически оказываются коммутативными.

1. K^--пространство (счетно-полное линейное полуупорядоченное пространство) с единицей единственным образом превращается в обобщенное полуупорядоченное кольцо так, что единица пространства совпадает с единицей кольца.

2. K-линеал с единицей не всегда может быть превращен в обобщенное полуупорядоченное кольцо. Существенную роль в вопросе о превращении K-линеала с единицей в обобщенное полуупорядоченное кольцо играет понятие внутренней нормальности K-линеала, введенное мною в цитированной работе. В этой же работе доказано, что для широкого класса K-линеалов свойство внутренней нормальности является необходимым и достаточным условием возможности превращения K-линеала в обобщенное полуупорядоченное кольцо. В сообщении более подробно рассматривается роль свойства внутренней нормальности в упомянутом вопросе.

3. Г. И. Домрачева [2] доказала, что K-пространство без единицы единственным образом превращается в обобщенное полуупорядоченное кольцо так, что система

частичных единиц умножения (заменяющая в кольцах без единицы обычную единицу) совпадает с заранее заданной системой попарно дизъюнктных элементов. В полном объеме предыдущий результат не переносится на K-пространства и K-линеалы без единицы. Устанавливаются некоторые условия, при которых частично упорядоченные множества указанных классов превратимы в обобщенные полуупорядоченные кольца.

Лит.: 1. Вулих Б. З., Матем. сб., 33 (1953), 343—358. 2. Домрачева Г. И., Канд. диссерт., Ленинградск. гос. педагогич. ин-т им. А. И. Герцена, 1955.

Л. И. Гаврилов (*Ленинград*). **K-продолжаемые полиномы.** Полином

$$f(z) = 1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

называется K-продолжаемым, если можно составить полином

$$f_1(z) = f(z) + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots + a_m z^m,$$

который при надлежащем выборе $a_{n+1}, \ldots, a_m$ и числа m будет иметь корни, расположенные на множестве K плоскости комплексного переменного. Мы ищем такое множество K, на которое любой полином $f(z)$ K-продолжаем. В настоящее время наиболее общим результатом, полученным в этой области, является следующий. В качестве множества K можно взять множество, состоящее из двух частей. Первая часть состоит из дуги кривой, гомеоморфной прямолинейному отрезку, но не являющейся прямолинейным отрезком. Вторая часть состоит из счетного, всюду плотного множества, расположенного на кривой, гомеоморфной окружности, расположенной между двумя окружностями $|z| = a$ и $|z| = b$ и содержащей начало координат внутри себя.

В случае, когда множество K состоит из множества, расположенного на окружности $|z| = a \neq 0$, теория продвинута значительно дальше.

Лит.: Гаврилов Л. И., Матем. сборн., 36 (78), (1955), 271—274.

Ф. Р. Гантмахер (*Москва*). **О структурной устойчивости суммы двух многочленов.** Рассматриваются два действительных многочлена $D(z)$ и $K(z)$. Дано расположение их корней относительно действительной и мнимой осей в комплексной z-плоскости, т. е. число корней в каждом из четырех квадрантов, на каждой из четырех полуосей и число нулевых корней. Определяются необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять это расположение корней, для того, чтобы при надлежащем подборе величин корней сумма $D(z) + K(z)$ была устойчивым многочленом, т. е. многочленом Гурвица. Эта алгебраическая задача возникла в теории автоматического регулирования. Ее решение дает условия структурной устойчивости одноконтурной системы автоматического регулирования.

Г. Б. Гуревич (*Москва*). **Алгебра группы автоморфизмов произвольной стандартной нульалгебры.** 1. Линейная алгебра Ли называется нульалгеброй, если у всех аффиноров (операторов линейного преобразования), ей принадлежащих, все характеристические числа равны нулю; всякая нульалгебра нильпотентна. Определение стандартной алгебры Ли дано в работе [1].

Состав стандартной нульалгебры $\mathfrak{F}$ вполне определяется ее шифром

$$\left(0^{i_1 i_2 \ldots i_q}_{j_1 j_2 \ldots j_q}\ n\right), \tag{1}$$

где n — размерность пространства Σ_n, в котором действуют аффиноры алгебры $\mathfrak{F}$, а $i_1, \ldots, j_q$ — натуральные числа, удовлетворяющие соотношениям:

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_q < n, \quad j_1 < j_2 < \ldots < j_q < n, \quad i_\lambda \leq j_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, q. \tag{2}$$

При некотором канонической относительно $\mathfrak{F}$ базисе пространства Σ_n стандартная нульалгебра $\mathfrak{F}$ есть линейная оболочка тех координатных диад e_{xy}, для которых

$$x \leqslant i_q; \quad \text{при} \quad x \leqslant i_\lambda \quad y > j_\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \ldots, q \tag{3}$$

(матрица координатной диады e_{xy} содержит 1 на пересечении x-й строки и y-го столбца, а все остальные ее элементы равны нулю).

В статье [2] даны условия изоморфизма двух стандартных нульалгебр; тем самым выделен специальный класс нильпотентных алгебр Ли. Первый шаг при изучении этого класса алгебр Ли должен состоять в установлении для каждой из них группы ее автоморфизмов; ниже найдена алгебра Ли указанной группы.

2. Общий аффинор A алгебры Ли $\mathfrak{A}$ группы автоморфизмов стандартной нульалгебры $\mathfrak{F}$ с шифром (1) определяется нижеследующими формулами.

1) Диада e_{xy} не принадлежит коммутанту $[\mathfrak{F}^2]$ алгебры $\mathfrak{F}$.

При $i_1 > 1$, $j_q < n-1$

$$Ae_{xy} = \sum\nolimits_1 \theta_{\xi x} e_{\xi y} - \sum\nolimits_2 \theta_{y\eta} e_{x\eta} + z_{xy}, \tag{4}$$

где $\theta_{\lambda\mu}$ — произвольные числа, z_{xy} — любой элемент центра алгебры $\mathfrak{F}$, знак суммирования Σ_1 распространяется на те ξ, для которых $g(\xi) \leqslant g(x)$ (т. е. либо $\xi \leqslant x$, либо между ξ и x нет чисел шифра), а знак Σ_2 — на те η, для которых $g(\eta) \geqslant g(y)$.

Формула (4) сохраняет силу и в случаях, когда

$i_1 = 1$, $x > 1$; $i_1 = 1$, $x = 1$, $y > j_2$; $j_q = n-1$, $y < n$; $j_q = n-1$, $y = n$, $x \leqslant i_{q-1}$. Если же $i_1 = 1$, $x = 1$, $y \leqslant j_2$ или если $j_q = n-1$, $y = n$, $x > i_{q-1}$, то к правой части формулы (4) добавляются дополнительные слагаемые.

2) Диада $e_{xy} \in [\mathfrak{F}^2]$. Здесь во всех случаях

$$Ae_{xy} = \sum\nolimits_1 \theta_{\xi x} e_{\xi y} - \sum\nolimits_2 \theta_{y\eta} e_{x\eta} \tag{5}$$

(обозначения те же, что в формуле (4)).

На основе формул для аффинора A найдены также и все полухарактеристические подалгебры любой стандартной нульалгебры (подалгебра называется полухарактеристической, если она инвариантна относительно всех инфинитезимальных автоморфизмов алгебры $\mathfrak{F}$).

Лит.: 1. Гуревич Г. Б., Матем. сб., 35 (77), (1954), 437—460. 2. Гуревич Г. Б., Труды Моск. матем. об-ва.

С. Т. Завало (*Черкассы*). **Операторные свободные группы.** В докладе изложены основные результаты изучения операторных свободных групп как обобщения понятия свободной группы. Естественными обобщениями понятия свободной группы являются понятия операторной свободной группы с группой операторов (Г-свободная группа) и со свободной ассоциативной системой операторов (S-свободная группа).

Пусть Σ — полугруппа, состоящая из элементов ε, α, $\beta, \ldots$, где ε — единичный элемент полугруппы. В частности, Σ может быть группой или свободной ассоциативной системой.

Определение 1. Операторная группа G с полугруппой операторов Σ называется *Σ-свободной группой*, если G — свободная группа и если в ней существует такое множество M элементов x_i (i пробегает некоторое множество индексов), что множество M_Σ всех элементов вида $x_i\alpha$, где x_i — произвольный элемент множества M, а α — произвольный элемент полугруппы Σ, является ее системой свободных образующих.

Определение 2. Пусть дано некоторое множество операторных групп G_i (i пробегает некоторое множество значений) с одной и той же полугруппой операторов Σ. Свободное произведение $G = \prod\limits_i^* G_i$ этих групп сделаем операторной группой с полугруппой операторов Σ. Для этого каждому оператору $\sigma \in \Sigma$ поставим в соответствие эндоморфизм группы G, который отображает элемент $g_1 \cdot g_2 \ldots g_n$

в элемент $g_1^\sigma \cdot g_2^\sigma \ldots g_n^\sigma$, где $g_k \in G_{i_k}$, $k=1, 2, \ldots, n$. Группу G мы будем называть *операторным свободным произведением* операторных групп G_i.

Пусть область операторов Σ является группой. Обозначим ее буквой Γ.

Определение 3. Допустимая подгруппа Γ-свободной группы G, порожденная множеством элементов вида $g^{-1} \cdot g^\alpha$, где g — который фиксированный элемент группы G, а α — произвольный элемент некоторой подгруппы Δ группы Γ, называется группой $A_{g,\Delta}$. Строение подгруппы $A_{g,\Delta}$ полностью определяется строением подгруппы Δ.

Следующая теорема является основной.

Теорема 1. Всякая допустимая подгруппа U Γ-свободной группы G, отличная от E, есть операторное свободное произведение Γ-свободной группы F и операторных групп A_{g_ν, Δ_ν}, т. е.

$$U = F^* \Pi^* A_{g_\nu, \Delta_\nu}.$$

Эта теорема полностью описывает строение допустимых подгрупп Γ-свободной группы.

Пусть теперь область операторов Σ является свободной ассоциативной системой, состоящей из элементов σ_i. В этом случае область операторов будем обозначать буквой S.

Определение 4. Допустимая подгруппа U S-свободной группы G называется вполне допустимой, если вместе со всяким элементом g^{σ_i} она содержит и элемент g.

Теорема 2. Вполне допустимая подгруппа U S-свободной группы G, порожденная произвольным множеством элементов вида $g^{-1\sigma_i} \cdot g^{\sigma_k}$, где g — некоторый фиксированный элемент группы G, отличный от 1, а σ_i, σ_k — произвольные элементы ассоциативной системы S, является S-свободной группой.

Л. А. Калужнин (*Киев*). **Обобщения основной теоремы теории Галуа.** Пусть K — коммутативное поле, L — такое подполе поля K, что расширение K/L конечно. Пусть ранг $(K:L)=n$. Н. Бурбаки [1] сопоставляет расширению K/L совокупность E линейных отображений σ поля K, рассматриваемого как векторное пространство над полем L. E является 1) кольцом с единицей по отношению к определенным обычным образом операциям сложения и умножения линейных отображений, 2) векторным пространством над полем K, если очевидным образом определить произведение $a \in K$ и $\sigma \in E$ как линейное отображение, сопоставляюще каждому $x \in K$ элемент $(a\sigma)(x) = a \cdot \sigma(x)$. Размерность векторного пространства E над полем K равна n.

С другой стороны, если в кольце ε всех эндоморфизмов аддитивной группы поля K рассматривать подкольцо E с единицей, являющееся одновременно векторным пространством конечной размерности n над полем K, то совокупность всех $y \in K$, таких, что для каждого $x \in K$ и $\sigma \in E$ имеет место равенство $\sigma(yx) = y\sigma(x)$, образует подполе L поля K (наибольшее подполе такое, что каждое σ является линейным отображением поля K, рассматриваемого как векторное пространство над данным подполем). Подкольцо E является совокупностью всех линейных отображений векторного пространства K над полем L и ранг $(K:L)=n$. В этом смысле подполя L поля K с $(K:L)<\infty$ и кольца с единицей, содержащиеся в ε и являющиеся одновременно конечномерными векторными пространствами над полем K, соответствуют друг другу однозначно.

В рамках этого соответствия Н. Бурбаки [1], исходя из работ Е. Артина [2] и Н. Джекобсона [3], дал очень прозрачное доказательство основной теоремы теории Галуа о соответствии конечных групп автоморфизмов поля K и подполей L поля K, для которых расширение K/L является расширением Галуа (т. е. нормальным и сепарабельным). При этом использовался тот основной факт, что для этого (и только для этого) случая кольцо E, как векторное пространство над полем K, обладает базой, состоящей из автоморфизмов поля K над полем L.

Естественно провести соответствующее исследование кольца E и для более общего случая конечного расширения K/L, не обязательно являющегося расширением Галуа. При этом может быть использована идея автора из работы [4]. Для этого следует в множестве E, наряду с умножением операторов $\sigma \in E$ на элементы поля K слева (2), рассматривать также умножение на элементы $a \in K$ справа, определенное равенством $(\sigma a)(x) = \sigma(ax)$. Множество E рассматривается тогда как бимодуль поля K над полем L, если под этим понятием подразумевать множество, являющееся одновременно конечномерным векторным пространством для двух, вообще говоря, различных умножений на элементы поля K (слева и справа) и такое, что для элементов подполя L умножение слева и справа дает тот же результат.

Бимодуль Γ называется простым, если он, кроме 0, не содержит подбимодулей, отличных от Γ. Каждый автоморфизм α поля K над L порождает в E простой бимодуль $(a\alpha)$ (так как $(\alpha b)(x) = \alpha(bx) = \alpha(b)\,\alpha(x) = (\alpha(b)\,\alpha)(x)$. В некотором смысле простые бимодули являются обобщением автоморфизмов. Если расширение K/L сепарабельно (но не обязательно нормально), то соответствующий бимодуль E является прямой суммой простых бимодулей, не изоморфных между собой, и для любого простого бимодуля Γ поля K над полем L в разложении E имеется бимодуль, изоморфный Γ. Это обобщает вышеупомянутый факт о существовании базы пространства E, состоящей из автоморфизмов в случае расширений Галуа.

Для бимодулей определяется умножение, обобщающее естественным образом умножение автоморфизмов. На языке операций над бимодулями формулируются теоремы, обобщающие основную теорему теории Галуа. Для случая конечных сепарабельных расширений при этом получается теория, столь же законченная, как и для частного случая расширений Галуа. Для несепарабельного случая окончательные результаты пока не достигнуты.

Лит.: 1. Bourbaki N., Algèbre, V, Paris, 1950. 2. Artin E., Galois theory, Notre Dame University, 1946. 3. Jacobson N., Amer. J. of. Math., LXVI, (1944), 1—29. 4. Kaloujnine L., C. R. Acad. Sci. Paris, 214, (1942), 597—599.

Ш. С. Кемхадзе (*Батуми*). **Вторая теорема Прюфера для регулярных p-групп.** Как известно, p-группа G называется регулярной, если для любой пары элементов $a, b \in G$ всегда найдется такой элемент S из коммутанта $K\{a, b\}$ подгруппы $\{a, b\}$, что

$$(ab)^p = a^p b^p S^p.$$

Для регулярных p-групп, у которых всякая подгруппа с двумя образующими конечна, имеем:

а) совокупность p^α-х степеней всех элементов образует характеристическую подгруппу группы G, которую мы обозначим через $G^{(\alpha)}$;

б) совокупность элементов, порядки которых не превосходят p^α, также образует характеристическую подгруппу группы G, которую мы обозначим через $G_{(\alpha)}$.

Определение 1. Возрастающий инвариантный ряд

$$G^{(1)} = L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_\alpha \subset \ldots \subset G$$

с циклическими факторами порядка p называется L-рядом группы G.

Определение 2. Последовательность элементов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha, \ldots$ p-группы G, порядки которых соответственно равны $p^{n_1}, p^{n_2}, \ldots, p^{n_\alpha}, \ldots$ (где $n_\alpha \geqslant 1$, т. е. $\theta_\alpha \neq 1$), называется базой единственности p-группы G, если каждый элемент $x \in G$, отличный от 1, может быть выражен одним и только одним способом в виде

$$x = \theta_{\alpha_1}^{k_1} \theta_{\alpha_2}^{k_2} \ldots \theta_{\alpha_r}^{k_r},$$

где $0 \leqslant k_i < p^{n_{\alpha_i}}$, $i = 1, 2, \ldots, r$, и, кроме того, $\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_r$.

Определение 3. Элемент $a \neq 1$ p-группы G назовем элементом высоты n, если уравнение

$$x^{p^k} = a$$

при $k \leqslant n$ обладает в группе G хотя бы одним решением, но не имеет решения при $k = n + 1$. Если же это уравнение может быть решено в G для любого k, то скажем, что элемент a имеет бесконечную высоту. Высотой некоторого множества элементов A группы G назовем максимальную высоту элементов, входящих в это множество.

В работе для регулярных p-групп G, у которых всякая подгруппа с двумя образующими конечна, доказана

Лемма 1. Если нижний слой $G_{(1)}$ группы G обладает L-рядом

$$E = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_\alpha \subset \ldots \subset G_{(1)},$$

составленным из нормальных делителей группы G, то и каждая подгруппа $G_{(n)}$ группы G обладает L-рядом, составленным из нормальных делителей группы G.

Отметим, что нижний слой конечной регулярной p-группы G обладает L-рядом, составленным из нормальных делителей группы G.

Лемма 2. Если нижний слой $G_{(1)}$ регулярной p-группы G обладает L-рядом, вполне упорядоченным по возрастанию, составленным из нормальных делителей группы G и расположенным по неубыванию высот скачков, которые предполагаются конечными, то группа G обладает базой единственности.

Теорема. Если в счетной регулярной p-группе G без элементов бесконечной высоты нижний слой лежит в центре, то группа G обладает базой единственности.

Легко заметить, что частным случаем доказанной теоремы является вторая теорема Прюфера:

Всякая счетная примарная группа, не содержащая элементов бесконечной высоты, разлагается в прямую сумму циклических групп.

С другой стороны, существуют примеры некоммутативных p-групп, удовлетворяющих условиям нашей теоремы.

В конце работы приведены некоторые замечания об ульмовских факторах и теореме Ульма для регулярных p-групп.

П. Г. Конторович (*Свердловск*). **К теории полугрупп в группе.** Будем рассматривать группу G без кручения с фиксированной в ней инвариантной, чистой полугруппой Γ с единицей. В полугруппе Γ можно развернуть теорию идеалов, аналогичную теории идеалов в коммутативном кольце [1], [2]. Свойства идеалов полугруппы Γ определяются природой Γ и G.

Все идеалы полугруппы Γ являются двусторонними. Пусть $I(\mathfrak{A})$ — пересечение всех изолированных идеалов, содержащих идеал $\mathfrak{A}$. Тогда $I(\mathfrak{A}\mathfrak{H}) = I(\mathfrak{A}) \cap I(\mathfrak{H})$, где $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$ — идеалы полугруппы Γ. Идеал $\mathfrak{P}$ называется простым, его дополнение $\Gamma \setminus \mathfrak{P} = C(\mathfrak{P})$ является полугруппой. В этом случае $C(\mathfrak{P})$ называется выпуклой подполугруппой, а $H(\mathfrak{P}) = C(\mathfrak{P})\, C(\mathfrak{P})^{-1}$ — выпуклой подгруппой, порожденной полугруппой $C(\mathfrak{P})$ (M^{-1} есть множество элементов, обратных элементам множества M).

Множество $W(a)$ из всех элементов $x \in \Gamma$, для которых $I(\Gamma x) \supseteq I(\Gamma a)$, является минимальной выпуклой подполугруппой, содержащей элемент $a \in \Gamma$. Совокупность $\{\ldots, W(a), \ldots\}$, где a пробегает Γ, является локальной системой для Γ, а совокупность групповых замыканий $\{\ldots, H(u) = W(a)\, W^{-1}(a), \ldots\}$ является локальной системой для группы $\Gamma\Gamma^{-1}$. Если Γ покрывается циклическими (абелевыми) выпуклыми подполугруппами, то Γ — локально-циклическая (абелева) полугруппа.

Пересечение $\bar{a} = I(\Gamma a) \cap W(a)$ называется u-классом. Полугруппа Γ коммутативна тогда и только тогда, когда все ее u-классы коммутативны.

Дизъюнктор $D(\mathfrak{A})$ идеала $\mathfrak{A}$ определяется как множество всех элементов $x \in \Gamma$, удовлетворяющих условию

$$xC(\mathfrak{N}) \subset C(\mathfrak{A}), \qquad C(\mathfrak{A})\, x \subset C(\mathfrak{A}).$$

$D(\mathfrak{A})$ является выпуклой подполугруппой без общих элементов с $\mathfrak{A}$. Аналогично определяются левый и правый дизъюнкторы идеала $\mathfrak{A}$. Дизъюнктор $D(a)$ главного идеала Γa содержится в централизаторе элемента a. $D(a)$ является одновременно левым и правым дизъюнктором, причем $x \in D(a)$ $(x \in \Gamma)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma x \cap \Gamma a = \Gamma x a$.

Имеет место $D(ab) = D(a) \bigcap D(b)$.

Совокупность элементов $x \in \Gamma$, для которых $D(x) = D(a)$, называется D-классом. D-класс есть изолированная подполугруппа, содержащаяся в своем нормализаторе. Если все D-классы коммутативны, то Γ коммутативна.

Множество простых элементов из Γ (т. е. элементов $p \in \Gamma$, для которых Γ_p является простым идеалом) порождает выпуклую коммутативную инвариантную подполугруппу Π из Γ. Если в Γ имеется только конечное множество простых элементов и G есть R-группа, то Π содержится в центре полугруппы Γ.

Идеал Q называется примарным, если $D(Q) = C(I(Q))$. В этом случае $I(Q)$ есть единственный минимальный простой идеал над Q.

Теория Крулля [3] для примарных идеалов в коммутативном кольце переносится и на примарные идеалы в Γ.

Для идеалов, представимых в виде пересечения конечного числа примарных идеалов, имеют место теоремы однозначности, соответствующие теоремам однозначности для таких идеалов в коммутативном кольце.

Рассмотренные проблемы тесно связаны с теорией частично упорядоченных групп.

Лит.: 1. Конторович П. Г., ДАН СССР, **93**, № 2, (1953), 229—291. 2. Конторович П. Г., Уч. зап. Казанск. гос. унив., 114, кн. 8 (1954), 35—43. 3. Krull W., Math. Ann. 101, (1929), 729—744.

А. И. Кострикин (*Москва*). **Нильпотентные группы и кольца Ли.** Для колец Ли характеристики p, удовлетворяющих n-му условию Энгеля, $n < p$ (n — любое в случае $p = 0$), определяется радикал, аналогичный радикалу Левицкого для ассоциативных колец. С помощью этого понятия доказывается локальная нильпотентность колец Ли, удовлетворяющих n-му условию Энгеля, в следующих случаях:

a) $n = 4, \ p \geqslant 5$,
b) $n = 5, \ p > 5$,
c) $n = 6, \ p > 7$.

Результат a) и связь, существующая между кольцами Ли и группами, определяемыми тождественным соотношением $x^p = 1$, приводит к решению ослабленной проблемы Бернсайда для показателя 5.

Проводится также некоторое исследование, относящееся к вопросу об эквивалентности проблемы Бернсайда для показателя p (p — простое) и задачи о локальной нильпотентности кольца Ли характеристики p, удовлетворяющего $(p-1)$-му условию Энгеля.

Л. Я. Куликов (*Москва*). **Универсально полные абелевы группы.** Абелева группа называется редуцированной, если она не содержит ненулевых полных подгрупп, т. е. подгрупп, всякий элемент которых делится на любое натуральное число.

Абелева группа G называется вполне редуцированной, если $\bigcap_{n \in N} nG = \{0\}$, где N — совокупность всех натуральных чисел.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ какую-либо бесконечную последовательность $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ натуральных чисел со следующими свойствами: α) каждый член последовательности делит последующий член, β) для любого заданного натурального числа n найдется член последовательности, кратный n. Пусть G — вполне редуцированная группа; построим группу $U(G)$, которую назовем универсальным расширением группы G. Обозначим через G_{n_k} факторгруппу $G \mid n_k G$, $n_k \in \mathfrak{N}$. Элементом группы $U(G)$ будем считать всякую последовательность $x = \{x_k\}_{n_k} \in \mathfrak{N}$, где $x_k \in G_{n_k}$. Сложение двух элементов x и y, $y = \{y_k\}_{n_k} \in \mathfrak{N}$, определяется равенством $x + y = \{x_k + y_k\}_{n_k} \in \mathfrak{N}$. Элемент $g \in G$ будем считать равным элементу $x = \{x_k\}_{n_k} \in \mathfrak{N}$ группы $U(G)$, если $x_k = g + n_k G$ при всяком $n_k = \in \mathfrak{N}$. Строение группы $U(G)$ не зависит от выбора множества $\mathfrak{N}$ со свойствами α), β).

Вполне редуцированная группа H называется универсально полной, если для какого-либо множества $\mathfrak{N}$ со свойствами α), β) всякая убывающая последовательность классов смежности $x_1 \supset x_2 \supset \ldots \supset x_k \supset \ldots$, где $x_k \in H/n_k H$, $n_k \in \mathfrak{N}$, имеет непустое пересечение.

Универсально полная группа H, удовлетворящая условию $mH = H$ для всякого натурального числа m, взаимно простого с данным простым числом p, называется p-адически полной.

Пусть $\{ G_\alpha \}_{\alpha \in M}$ — множество непересекающихся вполне редуцированных групп. Построим группу F следующим образом: элементом группы F будем считать всякую последовательность $x = \{ g_\alpha \}_{\alpha \in M}$, $g_\alpha \in G_\alpha$, все компоненты g_α которой, за исключением конечного числа при всяком фиксированном натуральном n, удовлетворяют условию $g_\alpha \in nG_\alpha$. Сумма двух элементов x и $y = \{ g'_\alpha \}_{\alpha \in M}$ определяется формулой $x + y = \{ g_\alpha + g'_\alpha \}_{\alpha \in M}$. Группу F назовем регулярной прямой суммой групп G_α и будем писать $F = \underset{\alpha \in M}{S} G_\alpha$.

Обозначим через K_p кольцо рациональных чисел со знаменателями, взаимно простыми с данным простым числом p; символом Z_p обозначим кольцо целых p-адических чисел. Кольцо эндоморфизмов факторгруппы аддитивной группы R всех рациональных чисел по подгруппе C целых чисел обозначим через V и назовем кольцом универсальных чисел. Аддитивная группа кольца V является универсально полным расширением аддитивной группы целых рациональных чисел и разлагается в полную прямую сумму аддитивных групп колец Z_p (с различными p).

Абелеву группу с кольцами Z_p, K_p или V в качестве областей операторов будем называть соответственно Z_p-, K_p- или V-группой.

Строение и основные свойства универсально полных групп описывают следующие теоремы.

1. Всякая p-адически полная группа H может быть представлена в виде регулярной прямой суммы Z_p-циклических групп. При этом, если B — базисная подгруппа группы H и $B = \sum_{\alpha \in M} C_\alpha$ — ее разложение в прямую сумму K_p-циклических подгрупп, то $H = \underset{\alpha \in M}{S} U(C_\alpha)$.

2. Всякая универсально полная группа разлагается, и притом единственным образом, в полную прямую сумму p-адически полных (с различными простыми p) групп.

3. Всякая универсально полная группа H может быть представлена в виде регулярной прямой суммы Z_p-циклических групп (с различными или одинаковыми p), причем для данного простого p число Z_p-циклических прямых слагаемых является инвариантом группы H и равно рангу факторгруппы H/pH.

4. Для всякой вполне редуцированной абелевой группы G существует группа G^* со свойствами:

a) группа G^* является регулярной прямой суммой Z_p-циклических групп (с одинаковыми или различными p);

b) группа G есть сервантная подгруппа группы G^*;

c) факторгруппа G^*/G является полной группой.

Группа G^* со свойствами a), b), c) определяется однозначно с точностью до изоморфизма, переводящего всякий элемент группы G в себя. Группа G^* изоморфна универсальному расширению $U(G)$ группы G.

5. Всякое прямое слагаемое универсально полной группы также является универсально полной группой. Регулярная прямая сумма любого множества универсально полных групп есть универсально полная группа.

6. Редуцированная абелева группа тогда и только тогда является прямым слагаемым всякой абелевой группы, в которой она содержится в качестве сервантной подгруппы, когда она универсально полна.

Имеют место также следующие теоремы, которые будут играть существенную роль при изучении счетных абелевых групп без кручения.

7. Всякая абелева Z_p-группа без кручения, имеющая счетную систему образующих относительно кольца операторов Z_p и не содержащая элементов бесконечной высоты, разлагается в прямую сумму Z_p-циклических подгрупп.

8. Для всякой редуцированной счетной K_p-группы A без кручения существует Z_p-группа $\bar{A}$ со свойствами:

$\mathfrak{a}_1$) группа $\bar{A}$ разлагается в прямую сумму Z_p-циклических подгрупп;

$\mathfrak{b}$) группа A есть сервантная подгруппа группы $\bar{A}$;

$\mathfrak{c}$) факторгруппа $\bar{A}/A$ является полной группой.

Группа $\bar{A}$ со свойствами $\mathfrak{a}_1$), $\mathfrak{b}$), $\mathfrak{c}$) определяется однозначно с точностью до изоморфизма, переводящего всякий элемент группы A в себя.

9. Для всякой редуцированной счетной абелевой группы G без кручения существует U-группа $\tilde{G}$ со свойствами:

$\mathfrak{a}_2$) группа $\tilde{G}$ является прямой суммой V-циклических подгрупп;

$\mathfrak{b}$) группа G есть сервантная подгруппа группы $\tilde{G}$;

$\mathfrak{c}$) факторгруппа $\tilde{G}/G$ является полной группой.

Группа G со свойствами $\mathfrak{a}_2$), $\mathfrak{b}$), $\mathfrak{c}$) определяется однозначно с точностью до изоморфизма, переводящего всякий элемент группы G в себя.

Лю-Шао-сюэ (*Москва*). **О расщеплении бесконечных алгебр.** В работе изучается вопрос о перенесении теоремы Веддербарна—Мальцева о существовании и единственности расщепления для конечных ассоциативных алгебр, а также аналогичных теорем для конечных альтернативных, лиевых и йордановых алгебр на некоторые классы бесконечных алгебр.

Обозначим через N нильпотентность для ассоциативного, альтернативного и йорданова случаев и разрешимость для лиева случая, через C — сепарабельность для ассоциативного случая и полупростоту для остальных случаев. Пусть A — ассоциативная алгебра над любым полем или альтернативная (йорданова, алгебраическая лиева) алгебра над полем характеристики нуль. При этом алгебраической называется лиева алгебра, в которой для любых двух элементов x, a существует такое натуральное число $n(x, a)$, что элементы

$$xa,\ xa^2 = (xa)\,a,\ \ldots,\ xa^{n(x,a)} = \left(xa^{n(x,a)-1}\right) a$$

линейно зависимы.

Имеет место теорема о существовании и единственности расщепления алгебры A в каждом из следующих случаев.

1. A/R — конечная C-алгебра, где R — локально N-радикал алгебры A (его существование доказывается).

2. Локально N-радикал R алгебры A конечен и A/R — прямая сумма любого числа конечных C-алгебр.

3. (Для ассоциативного, альтернативного и лиева случаев). Локально N-радикал R алгебры A конечен и A/R — локально C-алгебра.

4. A/R — конечная C-алгебра и алгебра A полна в R-адической топологии, если R — идеал алгебры A и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} R_i = 0$, где $R_1 = R$, $R_{i+1} = R_i(R^2) + (R_iR)\,R$.

5. (Для ассоциативного, альтернативного и лиева случаев). A/R — прямая сумма любого числа конечных C-алгебр и всякая центрированная система $\{x_\alpha + E_\alpha\}$, где $x_\alpha \in R$ и $E_\alpha\,(\in R)$ — идеалы алгебры A, содержащие какой-нибудь идеал из $R^{[i]}$, имеет непустое пересечение. Здесь R — идеал алгебры A и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} R^{[i]} = 0$, где $R^{[1]} = R$ и $R^{[i+1]} = RR^{[i]} + R^{[i]}R$.

Е. С. Ляпин (*Ленинград*). **О делимости в полугруппах.** 1. Полугруппой называется множество $\mathfrak{A}$, для элементов которого определено однозначное ассоциативное действие умножения. В произвольной полугруппе уравнения $AX = B$, $YA = B$ не всегда разрешимы. В случае разрешимости первого из них говорят, что A есть левый делитель элемента B. В случае, когда одним из решений является B, говорят, что A есть левая единица элемента B, а B — правый нуль элемента A. Аналогично для второго уравнения. Элемент, являющийся и левым и правым делителем каждого элемента полугруппы, называется обратимым элементом.

2. При исследовании полугрупп изучение обратимых элементов обычно может быть продвинуто значительно дальше и глубже. В связи с этим возникает определение: элемент A полугруппы $\mathfrak{A}$ называется потенциально обратимым в ней, если существует такая надполугруппа полугруппы $\mathfrak{A}$, в которой A есть обратимый элемент. Оказывается, что для того, чтобы A был потенциально обратим в $\mathfrak{A}$, необходимо и достаточно, чтобы при всяком B уравнения $A\mathfrak{X}=B$, $YA=B$ имели не более одного решения каждое. Отсюда, в частности, следует, что в полугруппе с сокращением каждый элемент потенциально обратим.

При помощи указанного критерия удается доказать потенциальную обратимость некоторых необратимых бесконечных матриц.

3. То, что всякая полугруппа может быть изоморфно представлена преобразованиями, является важнейшей причиной развития теории полугрупп. Изучение свойств полугрупп преобразований, сохраняющихся при любых изоморфизмах, принадлежит общей теории полугрупп. Важное свойство наличия неподвижной точки у каждого преобразования еще не является свойством указанного типа. Однако к изучению этого свойства возможен следующий подход. Обозначим через P класс таких полугрупп, каждый элемент которых имеет правый нуль. Оказывается, что при любом представлении преобразованиями полугруппы из P каждое преобразование представления имеет неподвижную точку. Обратно, всякая полугруппа с таким свойством принадлежит P.

Пусть $\mathfrak{A}$ — полугруппа преобразований некоторого множества. Оказывается, что каждое преобразование из $\mathfrak{A}$ имеет неподвижную точку в том и только в том случае, когда среди полугрупп преобразований того же множества имеется такая, которая содержит $\mathfrak{A}$ и принадлежит P.

Доказывается, что класс P обладает базисом, т. е. таким подклассом P_0, что всякая полугруппа из P является суммой некоторых своих подполугрупп, принадлежащих P_0, причем всякая полугруппа с таким свойством принадлежит P, а никакой собственный подкласс класса P_0 этими свойствами не обладает.

Все базисы класса P и строение полугрупп, их составляющих, описываются с помощью некоторой специальной конструкции.

4. Совокупность обратимых элементов $\mathfrak{A}$ обозначим через $\mathfrak{G}$, а совокупность необратимых — через $\mathfrak{H}$. Совокупность $\mathfrak{G}$ является группой, единица которой оказывается единицей полугруппы $\mathfrak{A}$. Полугруппа $\mathfrak{A}$ называется полугруппой с отделимой групповой частью, если она обладает единицей, а $\mathfrak{H}$ является подполугруппой. К классу таких полугрупп принадлежат все конечные и все коммутативные полугруппы, все полугруппы с единицей, представимые матрицами, и др.

Если полугруппа преобразований достаточно полна в некотором смысле, то отделимость ее групповой части необходима и достаточна для того, чтобы для любого ее элемента A были эквивалентны следующие свойства: 1) для всякого α из преобразуемого множества разрешимо относительно ξ уравнение $A\xi=\alpha$; 2) при любом α уравнение $A\xi=\alpha$ имеет не более одного решения.

Среди полугрупп, обладающих единицей, полугруппы с отделяющейся групповой частью и только они не имеют односторонне обратимых элементов и не имеют увеличительных элементов. Всякая подполугруппа такой полугруппы $\mathfrak{A}$, содержащая единицу $\mathfrak{A}$, сама является полугруппой с отделимой групповой частью.

Л. М. Махарадзе (*Москва*). **Локально-нильпотентные идеалы в топологических кольцах.** Работа посвящена построению теории, обобщающей на случай топологических колец теорию локально-нильпотентного радикала Левицкого, а также перенесению на топологические кольца некоторых теорем Левицкого о ниль-идеалах и локально-нильпотентных идеалах дискретных ассоциативных колец.

Для получения основных результатов оказалось необходимым наложить на рассматриваемые кольца некоторые ограничения, в частности, требовать существования локально-нильпотентной окрестности нуля, причем локальная нильпотентность понимается в следующем смысле: подмножество топологического кольца S локально-нильпотентно, если замкнутое подкольцо $R \subset S$, порожденное конечным числом элементов, принадлежащих этому множеству, является нильпотентным, т. е. для любой окрестности нуля A_α существует такое натуральное число n, что $R^n \subset A_\alpha$.

Кольца, удовлетворяющие вышеуказанным условиям, в работе названы Q-кольцами.

Топологическое кольцо называется ниль-кольцом, если всякий его элемент нильпотентен.

Сумму всех локально-нильпотентных двусторонних (замкнутых) идеалов назовем локально-нильпотентным радикалом.

Мы будем рассматривать топологические кольца, удовлетворяющие условиям:

1) полная система окрестностей нуля кольца S состоит из правых идеалов;

2) в кольце S существует ограниченная окрестность нуля A_α;

3) кольцо S является Q'-кольцом.

При этих условиях доказывается, что локально-нильпотентный радикал $N(S)$ кольца S является локально-нильпотентным идеалом, который содержит все односторонние локально-нильпотентные идеалы.

Натуральное число n назовем индексом топологического кольца S относительно окрестности нуля A_α, если n является наименьшим числом, при котором $x^n \in A_\alpha$ для всех $x \in S$.

Доказывается теорема: Если топологическое ниль-кольцо S удовлетворяет условиям 1), 2), 3) и обладает индексом относительно некоторой локально-нильпотентной окрестности нуля, то оно локально-нильпотентно.

Будем говорить, что топологическое кольцо S удовлетворяет условию минимальности для идеалов по модулю окрестности нуля A_α, если во всяком непустом множестве идеалов, не содержащихся в A_α, имеется хотя бы один минимальный идеал. Если топологическое кольцо удовлетворяет условию минимальности по модулю любой своей окрестности нуля, то будем говорить, что это кольцо удовлетворяет условию минимальности.

Доказывается, что если топологическое кольцо удовлетворяет условиям 1), 2), 3) и условию минимальности для локально-нильпотентных двусторонних идеалов, то каждый локально-нильпотентный правый (левый) идеал кольца S нильпотентен.

Пусть топологическое кольцо S удовлетворяет условиям 1), 2), 3). Если условие максимальности удовлетворяется для правых идеалов S, содержащих $N(S)$, и для правых идеалов кольца S, содержащихся в $N(S)$, то все правые и левые ниль-идеалы кольца S нильпотентны.

Далее описывается структура бикомпактных полупростых (т. е. удовлетворяющих условию $N(S)=0$) топологических колец.

В. В. Морозов (*Казань*). **Доказательство теоремы регулярности.** В 1943 г. в докторской диссертации автора была доказана теорема регулярности:

Всякая максимальная неполупростая подалгебра полупростой алгебры Ли L над полем комплексных чисел регулярна.

Сложное доказательство этой теоремы автор заменяет значительно более простым, в котором существенно используются теорема автора о приведении всякой разрешимой подалгебры алгебры L к треугольному виду, разложение Гантмахера всякого элемента алгебры L в произведение семирегулярного и коммутирующего с ним нильпотентного и идея ортогонального дополнения.

Теорема регулярности позволяет провести классификацию всех максимальных неполупростых подалгебр полупростых алгебр Ли. Такая классификация была дана автором, а позже — Карпелевичем.

Е. Н. Мочульский (*Москва*). **Изоморфизмы прямых разложений.** В настоящем сообщении впервые излагаются полученные мною результаты. В отличие от работ

[1], [2], [3] и [4], здесь вводится новое понятие гипотезы расщепления, позволившее доказать ряд теорем при самых общих предположениях. Например, теоремы 1 и 2 обобщают соответственно теоремы 4 и 5 работы [4]. Найдено также необходимое и достаточное условие существования обменного изоморфизма (см. теорему 3) двух прямых разложений единицы дедекиндовой структуры с неразложимыми прямыми слагаемыми. Указываются также (теорема 4) необходимые и достаточные условия существования общего продолжения для двух прямых разложений единицы дедекиндовой структуры, каждое из которых имеет бесконечное множество прямых слагаемых. Это уже было сделано ранее в работе [5], но для вполне дедекиндовых структур.

Основные определения.

1. Всякое прямое разложение единицы дедекиндовой структуры $1=a_i \dot{+} \bar{a}_i$, где $\bar{a}_i=\dot{\sum\limits_{j\neq i}} a_j$, назовем правильным.

2. Пусть

$$1=\sum_{k=1}^{\cdot m} a_k=\sum_{l=1}^{\cdot n} al. \tag{1}$$

Будем говорить, что в структуре S выполнена гипотеза расщепления, если для всякого правильного прямого разложения единицы структуры $1=a_i \dot{+} \bar{a}_i$ первого из разложений (1) существует хотя бы одно такое правильное прямое разложение единицы структуры $1=b_i \dot{+} \bar{b}_j$ второго из разложений (1), что

а) $a_i=a_i' \dot{+} a_i''$,

б) эндоморфизм $\varphi_i\theta_j\varphi_i$ индуцирует автоморфизм элемента a_i', а эндоморфизм $\varphi_i\bar{\theta}_j\varphi_i$ индуцирует автоморфизм элемента a_i''.

Замечание. В частности, одно из слагаемых a_i' или a_i'' может равняться нулю.

3. Будем говорить, что два прямых разложения единицы структуры S $1=a_1 \dot{+} a_2 \dot{+} \ldots \dot{+} a_m=b_1 \dot{+} b_2 \dot{+} \ldots \dot{+} b_n$ с неразложимыми прямыми слагаемыми обладают обменным изоморфизмом, если каждое прямое слагаемое одного из этих разложений может быть замещено некоторым прямым слагаемым из другого разложения.

Теперь сформулируем некоторые основные результаты.

Теорема 1. Если в дедекиндовой структуре S выполнена гипотеза расщепления, то существуют прямые разложения

$$a_i=a_i' \dot{+} a_i'', \qquad \bar{a}_i=\bar{a}_i' \dot{+} \bar{a}_i'',$$
$$b_j=b_j' \dot{+} b_j'', \qquad \bar{b}_j=\bar{b}_j' \dot{+} \bar{b}_j'',$$

для которых имеют место следующие соотношения:

$$a_i' \dot{+} \bar{a}_i'=\bar{a}_i'+b_j'=b_j'+\bar{b}_j'=\bar{b}_j' \dot{+} a_i'$$
$$a_j'' \dot{+} b_j''=b_j'' \dot{+} \bar{b}_j''=\bar{b}_j'' \dot{+} \bar{a}_i''=\bar{a}_i'' \dot{+} a_i''.$$

Теорема 2. Если в дедекиндовой структуре S выполняется гипотеза расщепления и если даны два произвольных прямых разложения единицы структуры S с конечным числом прямых слагаемых: $1=a_1 \dot{+} \ldots \dot{+} a_m=b_1 \dot{+} \ldots \dot{+} b_n$, то существуют такие прямые разложения

$$a_i=a_{i1} \dot{+} \ldots \dot{+} a_{in} \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$
$$b_j=b_{j1} \dot{+} \ldots \dot{+} b_{jm} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

что имеет место следующее свойство:

Если I — подмножество множества всех целых чисел от 1 до n и $1 \leqslant k \leqslant n$, то

$$1=\dot{\sum_{i\neq k}} a_i \dot{+} \dot{\sum_{j\in j}} a_{kj} \dot{+} \dot{\sum_{j\,\overline{\in}\, j}} b_{kj}.$$

Теорема 3. Пусть $1 = a_1 \dot{+} a_2 \dot{+} \ldots \dot{+} a_m = b_1 \dot{+} b_2 \dot{+} \ldots \dot{+} b_n$ два прямых разложения единицы дедекиндовой структуры с неразложимыми прямыми слагаемыми каждое. Эти прямые разложения обладают обменным изоморфизмом тогда и только тогда, когда в структуре S выполняется гипотеза расщепления. Доказательство этой теоремы легко проводится, если воспользоваться теоремами 1 и 2.

Теорема 4. Два прямых разложения единицы полной дедекиндовой структуры $1 = \dot{\sum\limits_{\alpha \in M}} a_\alpha = \dot{\sum\limits_{\beta \in N}} b_\beta$ тогда и только тогда обладают общим продолжением, когда для всех $\alpha \in M$ и $\beta \in N$

$$1\theta_\beta \varphi_\alpha \bar{\theta}_\beta = 0.$$

Лит.: 1. Baer R., Trans. Amer. Math. Soc., 62, (1947), 62—98. 2. Лившиц А. Х., Матем. сб., 28 (70), (1951), 481—502. 3. Hostinsky L. A., Amer. Jour. of Math., 73, № 4, (1951), 741—755. 4. Мочульский Е. Н., Матем. сб., 37 (79), (1955), 89—102. 5. Курош А. Г., Изв. АН СССР, сер. матем., 7, (1943), 185—202.

А. С. Пекелис (*Свердловск*). **Структурные изоморфизмы разрешимых групп.** Говорят, что две группы структурно изоморфны, если изоморфны структуры их подгрупп.

Доказывается, что если имеются две структурно изоморфные группы и одна из них обладает конечным рациональным рядом или является разрешимой с условием максимальности или минимальности, то и вторая группа обладает аналогичным свойством.

В доказательстве используется результат из работы Сузуки [1] о том, что если одна из двух структурно изоморфных групп — конечная разрешимая, то и другая группа также конечная разрешимая.

При этом устанавливается, что в группах, обладающих конечным рациональным рядом, всякий нормальный ряд с факторами без кручения при структурных изоморфизмах переходит в нормальный ряд с факторами без кручения в структурно изоморфной группе.

Кроме того, доказывается, что если в одной из структурно изоморфных групп имеется абелев нормальный делитель без кручения, содержащий не менее двух независимых элементов, то централизатор образа этого нормального делителя является инвариантной подгруппой в другой из структурно изоморфных групп. В случае же, когда имеются две структурно изоморфные группы без кручения, требование, чтобы абелев нормальный делитель содержал не менее двух независимых элементов, является лишним. При этом если в одной из структурно изоморфных групп имеется изолированный абелев нормальный делитель без кручения, то образ его обладает аналогичными свойствами в другой группе.

Лит.: 1. Suzuki M., Trans. Amer. Math. Soc., 70, (1951), 345—371.

А. Г. Пинскер (*Ленинград*). **Локально упорядоченные группы.** Известно, что не во всякой группе можно естественным образом определить частичное упорядочение с обычными свойствами. Так, например, группы с кручением не могут быть структурно упорядочены. К их числу относятся и некоторые факторгруппы K-групп по их подгруппам, в частности, факторгруппа группы действительных чисел по подгруппе целых чисел. В связи с этим представляется целесообразным дать следующее обобщение понятий частично упорядоченного множества и частично упорядоченной группы.

Множество P назовем *локально упорядоченным*, если в нем определено отношение порядка, обладающее свойствами:

а) $a \leqslant a$,

б) если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$, и

в) если $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, $c \leqslant d$ и $a \leqslant d$, то $a \leqslant c$.

Если a — произвольный элемент P и $P_a = \{ x \mid x \geqslant a,\ x \in P \}$, то P_a — выпуклое подмножество P, и в нем соотношение транзитивности выполняется в полном объеме, так что P_a — частично упорядоченное множество. В частности, P_a может оказаться структурой, тогда P — *локальная структура*.

Будем говорить, что G — *локально упорядоченная группа*, если G является группой и локально упорядоченным множеством и если отношение порядка инвариантно относительно всех групповых сдвигов. Если G, сверх того, — локальная структура, то будем называть ее *локально структурно упорядоченной группой* (кратко: л. с. у. группой).

Примером *полной* л. с. у. группы может служить факторгруппа K-пространства с единицей по подгруппе целочисленных элементов. Класс таких групп может быть охарактеризован внутренним образом.

Теория полных л. с. у. групп развивается в тесной связи с теорией K-пространств. Можно показать, что совокупность положительных элементов полной л. с. у. группы изоморфна подструктуре совокупности положительных элементов некоторого K-пространства.

По отношению к топологии упорядоченности полная л. с. у. группа может оказаться компактной или бикомпактной топологической группой. В связи с этим методы и результаты теории топологических групп могут быть применены к решению некоторых задач теории K-пространств.

Б. И. Плоткин (*Свердловск*). **Радикальные и полупростые группы и алгебры Ли.** Рассматривается аналог фиттинговой структурной теории конечных групп для бесконечных групп. Приводятся приложения к изучению групп с условиями конечности. Основные результаты содержатся в работах [1], [2].

Методы, применяемые в теории групп, используются для рассмотрения аналогичных вопросов теории бесконечных алгебр Ли.

Лит.: 1. Плоткин Б. И., Матем. сб., 37-(79) : 3-(1955). 2. Плоткин Б. И., Труды Моск. матем. об-ва (1956).

И. И. Пятецкий-Шапиро (*Москва*). **Модулярные функции от нескольких переменных.** 1. Задачи, приведшие к модулярным функциям (работы Зигеля по теории квадратичных форм). Модулярные функции Гильберта.

2. Связь модулярных функций с абелевыми функциями.

3. Общая схема построения модулярных абелевых функций.

4. Описание областей и модулярных групп.

Л. Е. Садовский (*Москва*). **Структура подгрупп нильпотентной группы без кручения.** Множество подгрупп каждой группы G образует некоторую структуру. Две группы называются структурно изоморфными, если изоморфны структуры их подгрупп. Изоморфизм φ между структурами подгрупп G и G^φ называется структурным изоморфизмом между самими группами. Группа определяется структурой своих подгрупп, если она изоморфна всякой группе, которой она структурно изоморфна.

В результате изучения структурных изоморфизмов нильпотентных групп без кручения установлены следующие предложения.

1. Если в группе G имеется центральный ряд

$$G_0 = G \supset G_1 \supset \ldots \supset G_{n-1} \supset G_n = 1$$

с факторами G_{k-1}/G_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) без кручения, то ряд подгрупп

$$G_0^\varphi = G^\varphi \supset G_1^\varphi \supset \ldots \supset G_{n-1}^\varphi \supset G_n^\varphi = 1,$$

соответствующий этому ряду при структурном изоморфизме φ, будет центральным рядом группы G^φ с факторами без кручения.

2. При структурном изоморфизме φ верхнему центральному ряду

$$1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \ldots \subset Z_n = G$$

нильпотентной группы G без кручения соответствует верхний центральный ряд

$$1 = Z_0^\varphi \subset Z_1^\varphi \subset \ldots \subset Z_n^\varphi = G^\varphi$$

группы G^{φ}, структурно изоморфной G.

3. Группа, структурно изоморфная n-ступенной нильпотентной (локально нильпотентной) группе без кручения, сама является n-ступенно нильпотентной (локально нильпотентной) группой без кручения. (Этот факт иным путем был установлен ранее П. Г. Конторовичем и Б. И. Плоткиным [1].)

4. Свободная n-ступенно нильпотентная группа без кручения определяется структурой своих подгрупп.

5. При структурном изоморфизме φ нижнему центральному ряду нильпотентной группы G без кручения соответствует нижний центральный ряд группы G^{φ}.

6. Известно, что свободная (свободная абелева) группа определяется структурой своих подгрупп, и каждый структурный изоморфизм ее индуцируется в точности одним (двумя) групповыми изоморфизмами.

Для свободной метабелевой группы произвольного ранга r (которая, согласно 4, определяется своей структурой) выявлена целая серия структурных изоморфизмов, не индуцируемых групповыми изоморфизмами. Установлены взаимно однозначные соответствия между циклическими подгруппами двух свободных метабелевых групп ($r=2$), необходимые и достаточные для существования структурного изоморфизма между самими группами.

Лит.: 1. Конторович П. Г. и Плоткин Б. И., Матем. сб., 35, (1954), 187—192.

Л. А. Скорняков (*Москва*). ***T*-гомоморфизмы колец и неассоциативные свободные тела.** Назовем *T-гомоморфизмом* кольца R с областью операторов Λ однозначное отображение θ этого кольца на кольцо S с той же областью операторов, формально дополненное символом ∞, на который кольцевые операции не распространяются, если имеют место следующие свойства:

Г1. если $a, b \in R$, $\lambda \in \Lambda$, $\theta(a)$, $\theta(b) \neq \infty$, то $\theta(a+b) = \theta(a) + \theta(b)$, $\theta(ab) = \theta(a)\,\theta(b)$, $\theta(\lambda a) = \lambda\theta(a)$;

Г2. если $c = ab$, $\theta(c) \neq \infty$, $\theta(a) = \infty$, то $\theta(b) = 0$;

Г3. если $c = ab$, $\theta(c) \neq \infty$, $\theta(b) = \infty$, то $\theta(a) = 0$.

В отличие от обычного гомоморфизма, T-гомоморфизм не превращается в тривиальность для тел. В частности, специализация поля является T-гомоморфизмом.

Подкольцо I кольца R с областью операторов Λ называется *T-идеалом*, если существует подмножество J кольца R, обладающее следующими свойствами:

И1. дополнение O множества J в кольце R является допустимым подкольцом кольца R;

И2. I является допустимым идеалом кольца R;

И3. если $ab \in O$, $a \in J$, то $b \in I$;

И4. если $ab \in O$, $b \in J$, то $a \in I$.

Между T-идеалами и T-гомоморфизмами обычным образом устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Понятие T-гомоморфизма позволяет дать определение неассоциативного свободного тела (под телом понимается кольцо, в котором каждое из уравнений $ax = b$ и $xa = b$, $a \neq 0$, однозначно разрешимо).

Тело $\mathfrak{K}$ называется *неассоциативным свободным телом* с системой свободных образующих $\mathfrak{M}$, если:

С1. $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{K}$;

С2. никакое собственное подтело тела $\mathfrak{K}$ не содержит $\mathfrak{M}$;

С3. каково бы ни было однозначное отображение φ множества $\mathfrak{M}$ в какое-либо тело K, существует T-гомоморфизм θ тела $\mathfrak{K}$ в тело K, причем $\theta(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in \mathfrak{M}$.

Оказывается, что для каждого выбора множества $\mathfrak{M}$ и поля P существует неассоциативное свободное тело, единственное с точностью до изоморфизма, отображающего множество $\mathfrak{M}$ на себя. Поле P необходимо в процессе построения, хотя оно и не входит в определение. Кроме того, всякое тело является T-гомоморфным образом некоторого неассоциативного свободного тела. Наконец, устанавливается, что всякое подтело неассоциативного свободного тела свободно.

Д. А. Супруненко (*Минск*). **Линейные нильпотентные группы.** Изучаются неприводимые нильпотентные подгруппы полной линейной группы $GL(n, P)$.

Лемма. Пусть Γ — неприводимая нильпотентная подгруппа $GL(n, P)$, Z_1 — центр Γ, $Z_2|Z_1$ — центр $\Gamma|Z_1$. Тогда порядок каждого элемента из $Z_2|Z^1$ является делителем числа n. Если aZ_1 — элемент порядка ν из $Z_2|Z_1$, то в Γ найдется такой элемент g, что коммутатор (a, g) будет элементом порядка ν из Z_1.

Теорема 1. $\Gamma : Z_1 \leq \rho(n, l)$ (см. лемму), где число $\rho(n, l)$ зависит только от n и класса нильпотентности l группы Γ.

Для алгебраически замкнутого поля P справедливы следующие теоремы.

Теорема 2. Если характеристика поля P не делит число $n > 1$, то $GL(n, P)$ обладает неприводимыми нильпотентными подгруппами любого наперед заданного класса $l > 1$. Если же n делится на характеристику P, то в $GL(n, P)$ нет неприводимых нильпотентных подгрупп.

Теорема 3. В полной линейной группе имеется лишь конечное число несопряженных максимальных подгрупп заданного класса нильпотентности.

Теорема 4. В $GL(n, P)$ (n не делится на характеристику P) имеется столько несопряженных неприводимых максимальных метабелевых подгрупп, сколько существует неизоморфных абелевых групп порядка n. Все максимальные неприводимые метабелевы подгруппы $GL(n, P)$ просто описываются.

Теорема 5. Если n не имеет квадратных делителей, то все максимальные неприводимые нильпотентные подгруппы $GL(n, P)$ заданного класса l сопряжены в $GL(n, P)$.

Теорема 6. Все максимальные неприводимые локально нильпотентные подгруппы полной линейной группы сопряжены между собой.

Теорема 7. Все максимальные транзитивные нильпотентные подгруппы симметричной группы S_n сопряжены в S_n.

Из приведенной в начале леммы следует

Теорема 8. Абстрактная нильпотентная группа без кручения класса $l > 1$ ни над каким полем не имеет точных неприводимых линейных представлений.

В. К. Туркин (*Москва*). **Квазимономиальные представления групп.** Рассматриваются линейные представления конечных групп, получаемые из мономиальных представлений посредством преобразования с помощью вандермондовых матриц, элементы которых являются корнями из единицы соответствующим образом подобранных степеней. В получаемых таким образом линейных представлениях (названных автором квазимономиальными) лишь некоторым элементам группы будут соответствовать мономиальные матрицы. Но для этих элементов вычисление определителей соответствующих мономиальных матриц может быть произведено проще, чем в случае мономиального представления. Это обстоятельство дает возможность усиления критериев непростоты группы, полученных автором ранее.

Б. М. Уразбаев (*Алма-Ата*). **О некоторых асимптотических формулах в алгебре.** 1. Асимптотические формулы в алгебре стали изучаться после исследований Б. Н. Делоне, получившего общую асимптотическую формулу

$$\nu_{n,\tau} r^{\frac{n(n+1)}{2}} + O\left(r^{\frac{n(n+1)}{2} - 1}\right),$$

выражающую закон роста числа целых точек всех алгебраических полей данной степени n и сигнатуры τ, лежащих внутри n-мерной сферы радиуса r с центром в начале координат, когда r безгранично возрастает. Аналогичные асимптотические формулы для полей 3-й и 4-й степеней с различными группами Галуа были получены Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеевым. В основе этих результатов лежат новые методы геометрии чисел, которые создавались в совместных работах Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеева.

2. Относительно наиболее элементарных абелевых полей получены асимптотические формулы, выражающие закон роста числа таких полей, дискриминанты которых не превосходят известного предела.

Теорема 1. Число $N_l(x)$ циклических полей простой степени l, дискриминанты которых не превосходят x^{l-1}, выражается асимптотической формулой

$$N_l(x) = \lambda x + O\left(x^{1-\frac{1}{l-1}+\varepsilon}\right), \qquad (1)$$

где ε — произвольное положительное число.

Теорема 2. Закон роста числа абелевых полей степени l^2, представляющих композит двух циклических полей степени l, дискриминанты которых не превосходят $x^{l(l-1)}$, выражается асимптотической формулой

$$xf(\lg x) + O\left(x^{1-\frac{1}{l^2-1}+\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

где $f(u)$ — многочлен l-й степени с коэффициентами, зависящими от l.

Теорема 3. Число N абелевых полей степени l^k и типа $(\underbrace{l, l, \ldots, l}_{k})$, $k \geqslant 2$, дискриминанты которых не превосходят $x^{l^{k-1}(l-1)}$, представляется асимптотической формулой

$$N = xf(\lg x) + O\left(x^{1-\frac{1}{l^k-1}+\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0,$$

где $f(u)$ — многочлен степени $l^{k-1} + l^{k-2} + \ldots + l$, коэффициенты которого зависят только от l и k.

3. Формулой (1) выражается асимптотический закон роста суммы

$$\sum_{p_1 p_2 \ldots p_k \leqslant x} (l-1)^k,$$

распространенной по всем простым числам вида $p \equiv 1\,(l)$. Пользуясь методикой вывода формулы (1) и с помощью некоторых дополнительных рассмотрений можно получить асимптотические формулы, выражающие закон роста более сложных сумм (с «весом») вида

$$\sum_{p_1 p_2 \ldots p_k \leqslant x} k^m (l-1)^k, \qquad \sum_{p_1 p_2 \ldots p_k \leqslant x} C_k^m (l-1)^k \quad \text{и др.},$$

где m — заданное натуральное число. В частности, имеет место

Теорема 4. Справедлива асимптотическая формула

$$\sum_{p_1 p_2 \ldots p_k \leqslant x} k\,(l-1)^k = \lambda x\,(\ln \ln x + C) + O\left(xe^{-\mu\sqrt{\ln x}}\right),$$

где λ, μ, C — постоянные числа $\neq 0$.

4. Получена общая форма дискриминанта абелевых полей степени l^α (α — произвольное натуральное число) и типа

$$(\underbrace{l^h, \ldots, l^h}_{k};\ \underbrace{l^{h_1}, \ldots, l^{h_1}}_{k_1}; \ldots ;\ \underbrace{l^{h_\nu}, \ldots, l^{h_\nu}}_{k_\nu}), \qquad h > h_1 > \ldots > h_\nu,$$

и формула, выражающая число абелевых полей степени l^α, имеющих заданный дискриминант.

Я. В. Хион (*Тарту*). **Кольца, нормированные при помощи полугрупп.** Множество P называется упорядоченной полугруппой, если

1) P замкнуто относительно определенного в нем ассоциативного умножения;

2) P является линейно упорядоченным множеством с отношением $\geqslant$;

3) из $\alpha \geqslant \beta$ следует $\alpha\gamma \geqslant \beta\gamma$ и $\gamma\alpha \geqslant \gamma\beta$ при любом γ из P;

4) в P существует элемент 0 со свойствами $\alpha 0 = 0\alpha = 0$, $0 \leqslant \alpha$, при любом α из P;

5) из $\alpha\gamma = \beta\gamma \neq 0$ следует $\alpha = \beta$ и из $\gamma\alpha = \gamma\beta \neq 0$ следует $\alpha = \beta$.

Ассоциативное кольцо R называется нормированным при помощи упорядоченной полугруппы P, если всякому элементу a из R поставлен в соответствие элемент $w(a)$ из P, причем:

1) $w(a-b) \leqslant \max(w(a), w(b))$;

2) $w(ab) = w(a)w(b)$;

3) если $w(a) = 0$, то $a = 0$;

4) для любого α из P существует такое a из R, что $w(a) = \alpha$.

Известно, что всякое упорядоченное тело, в частности, поле, может быть естественным образом нормировано. Приведенное выше определение нормированного кольца позволяет естественным образом нормировать любое ассоциативное упорядоченное кольцо. Многие свойства упорядоченных колец оказываются справедливыми уже для более широкого класса нормированных колец, причем доказательства не становятся сложнее.

Большую роль при изучении нормированных колец играет изучение упорядоченных полугрупп. Используется понятие выпуклого идеала (идеал I упорядоченной полугруппы P называется выпуклым, если из α, $\beta \in I$, $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$ следует $\gamma \in I$). Фактор-полугруппу P/I по выпуклому двустороннему идеалу можно упорядочить.

Рассматриваются различные типы упорядоченных полугрупп: ниль-полугруппы (все элементы которых нильпотентны), простые полугруппы (без нетривиальных выпуклых двусторонних идеалов), целые полугруппы. Показывается, что теорию упорядоченных полугрупп можно свести на изучение упорядоченных ниль-полугрупп, простых упорядоченных полугрупп, целых упорядоченных полугрупп и на теорию расширений для упорядоченных полугрупп.

При исследовании нормированных колец используется также соответствующее понятие выпуклого идеала. Идеал I нормированного кольца R называется выпуклым, если из $a \in I$, $w(b) \leqslant w(a)$ следует $b \in I$. Фактор-кольцо R/I нормированного кольца по выпуклому двустороннему идеалу можно нормировать. Выделяются классы нормированных ниль-колец, целых колец (нормированных при помощи целых упорядоченных полугрупп), простых нормированных колец (без нетривиальных выпуклых двусторонних идеалов). Доказывается, что изучение любых нормированных колец можно свести на изучение этих трех типов нормированных колец и на теорию расширений для нормированных колец.

С. Н. Черников (*Молотов*). **Нильпотентные группы.** В теории групп уже давно наиболее исследованным классом групп является класс абелевых групп. Более широкий класс групп составляют нильпотентные группы, т. е. группы, обладающие центральным рядом конечной длины. Так как, в силу самого своего определения, некоммутативные нильпотентные группы достаточно близки к абелевым группам, то успехи в изучении бесконечных абелевых групп, достигнутые в первом тридцатилетии настоящего столетия, естественно должны были вызвать появление исследований, посвященных бесконечным нильпотентным группам, равно как и другим бесконечным группам, в том или ином смысле близким к абелевым (разрешимым, обобщенно нильпотентным, обобщенно разрешимым). Такого рода исследования появились в теории групп вскоре после второго всесоюзного математического съезда и получили к настоящему времени большой размах.

1. Конечные нильпотентные группы, или, иначе, специальные группы, служили объектом исследования еще в прошлом столетии. Наиболее распространены следующие три эквивалентных определения специальных групп:

1) специальные группы — это конечные p-группы и их прямые произведения;

2) специальные группы — это конечные группы, обладающие центральным рядом;

3) специальные группы — это конечные группы, удовлетворяющие нормализаторному условию.

При переходе к бесконечным группам эти определения перестают быть эквивалентными. В самом деле, теперь прямое произведение p-групп уже не всегда будет иметь центральный ряд (возрастающий), так как существуют бесконечные, даже локально конечные p-группы без центра. Первый пример такого рода p-группы был построен в 1939 г. А. Г. Курошем. С другой стороны, до сего времени неизвестно, обладает ли центром бесконечная p-группа, удовлетворяющая нормализаторному условию. Поэтому нет ответа на вопрос, совпадает ли класс групп, удовлетворяющих нормализаторному условию (даже в случае периодических групп), с классом групп, обладающих возрастающим центральным рядом.

2. В связи с изложенным в предыдущем пункте становится естественной попытка (она была предпринята С. Н. Черниковым в 1938 г.) выделить такой класс групп, вообще говоря, бесконечных, на который можно было бы перенести три отмеченных в предыдущем пункте определения специальных групп и для которого перенесенные определения были бы эквивалентными. Таким классом оказался класс локально конечных групп, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп. Так появились бесконечные специальные группы. Класс бесконечных специальных групп был подвергнут всестороннему изучению. В построении его теории, кроме С. Н. Черникова, приняли участие О. Ю. Шмидт, И. Д. Адо, А. И. Мальцев, Н. Н. Мягкова, Х. Х. Мухаммеджан. Оказалось, что каждая бесконечная специальная группа является конечным расширением прямого произведения конечного множества квазициклических групп (С. Н. Черников). Оказалось также, что в определении класса бесконечных специальных групп вместо условия минимальности для подгрупп можно взять условие минимальности для нормальных делителей (И. Д. Адо) или условие минимальности для абелевых подгрупп (О. Ю. Шмидт и С. Н. Черников). А. И. Мальцев показал, что специальные p-группы, и только они, изоморфно представимы матрицами над полем характеристики нуль.

3. Специальные группы обладают свойством локальной специальности, так как любое конечное множество элементов произвольной специальной группы порождает конечную специальную группу. Класс локально специальных групп явился очередным объектом исследований, связанных со специальными группами. Оказалось, что этот класс значительно шире класса специальных групп: он содержит все периодические группы, удовлетворяющие нормализаторному условию, и исчерпывается прямыми произведениями произвольных локально конечных p-групп (С. Н. Черников), тогда как класс специальных групп исчерпывается прямыми произведениями лишь специальных p-групп. При исследовании бесконечных локально специальных групп обнаружилось, что каждая из них обладает центральной системой с факторами простого порядка (С. Н. Черников) и потому весьма насыщена нормальными делителями; для произвольной бесконечной локально конечной p-группы это означает, в частности, ее непростоту.

4. В связи с изучением специальных групп (которые, как уже отмечалось, обладают возрастающим центральным рядом) естественно возникли вопросы, связанные с произвольными группами, обладающими возрастающим центральным рядом. Так как каждая специальная группа является конечным расширением полной группы, то в первую очередь возник вопрос о строении произвольных полных групп, обладающих возрастающим центральным рядом, или, иными словами, вопрос о строении произвольных полных ZA-групп. В строении такого рода групп обнаружилось сходство с полными абелевыми группами. В частности, максимальная периодическая подгруппа полной ZA-группы оказалась полной подгруппой, содержащейся в ее центре (С. Н. Черников). Из этого результата вытекают два следующих важных предложения:

1) полная периодическая ZA-группа абелева;

2) полная смешанная ZA-группа является фактор-группой некоторой полной ZA-группы без кручения.

Если полная абелева группа является прямым произведением квазициклических групп и групп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел, то произвольная полная ZA-группа является полупрямым произведением такого рода групп (С. Н. Черников).

5. Так как каждая абелева группа может быть вложена в некоторую полную абелеву группу, то, естественно, возник вопрос о возможности вложения произвольной ZA-группы в полную ZA-группу. Он был решен А. И. Мальцевым. При исследовании этого вопроса обнаружились теснейшие связи между локально нильпотентными группами (группа называется локально нильпотентной, если каждое конечное

множество ее элементов порождает нильпотентную группу) и группами и алгебрами Ли. Опираясь на такого рода связь, А. И. Мальцев в 1949 г. установил, что произвольная локально нильпотентная группа без кручения и, в частности, произвольная ZA-группа без кручения могут быть вложены в некоторую полную локально нильпотентную группу без кручения, причем ZA-группа соответственно вкладывается в полную ZA-группу. Этот результат сыграл большую роль в вопросе изучения произвольных локально нильпотентных групп без кручения и, в частности, ZA-групп без кручения. Класс локально нильпотентных групп оказался очень широким: локально нильпотентными являются, в частности, все ZA-группы (А. И. Мальцев), а также все группы, удовлетворяющие нормализаторному условию (Б. И. Плоткин). Отмечавшийся выше класс локально специальных групп в точности совпадает с классом периодических локально нильпотентных групп.

6. В изучении класса локально нильпотентных групп, как, впрочем, и в изучении более широких классов групп, определенную роль сыграла работа А. Г. Куроша и С. Н. Черникова [1], наметившая программу исследований этих классов групп. В изучении класса локально нильпотентных групп, кроме упоминавшихся уже авторов, приняли активное участие В. М. Глушков, О. Н. Головин, Н. Ф. Сесекин, Д. М. Смирнов, Б. И. Плоткин и В. С. Чарин. Локально нильпотентные группы изучались при разного рода дополнительных предположениях: при отсутствии отличных от единицы элементов конечного порядка, при условиях минимальности и максимальности для сервантных нормальных делителей, при некоторых заданных наперед свойствах абелевых подгрупп и других дополнительных предположениях. Изучались также и некоторые общие свойства локально нильпотентных групп, связанные с различными системами из подгрупп (например, с системой сервантных подгрупп). Выяснилось, что наиболее простые из локально нильпотентных групп, локально нильпотентные группы без кручения конечного ранга (конечного специального ранга в смысле А. И. Мальцева), и только они, изоморфно представимы с помощью треугольных матриц с единичной диагональю над полем рациональных чисел (В. С. Чарин). Нильпотентность таких локально нильпотентных групп была установлена А. И. Мальцевым. Изучение более широких классов локально нильпотентных групп без кручения, даже при условии минимальности для сервантных нормальных делителей, не привело пока к результатам, раскрывающим их строение. Произвольная локально нильпотентная группа без кручения обладает центральной системой, состоящей из сервантных нормальных делителей (В. М. Глушков), и потому весьма насыщена сервантными нормальными делителями.

В связи с отмеченным здесь результатом В. С. Чарина естественно возникает вопрос о строении локально нильпотентных подгрупп полной линейной группы $GL(n, P)$. В случае, когда P-алгебраически замкнутое поле, этот вопрос достаточно полно изучен Д. А. Супруненко, занимавшимся, впрочем, более общим вопросом о строении разрешимых подгрупп группы $GL(n, P)$.

7. Из иностранных авторов, занимавшихся исследованием бесконечных нильпотентных групп, здесь следует упомянуть Бера, Гирша, Дженнингса и особенно первого из них. В работах Бера можно найти ряд свойств разного рода обобщенно нильпотентных групп; я не имею возможности формулировать здесь полученные им результаты (наиболее важные из них приведены в книге А. Г. Куроша [2]). Однако ни результаты Бера, ни результаты других иностранных авторов в области обобщенно нильпотентных групп не оказали существенного влияния на направление исследований по нильпотентным группам в Советском Союзе. Эта новая ветвь теории групп почти целиком создана трудами советских ученых.

8. Каковы ближайшие перспективы развития теории нильпотентных групп? К настоящему времени уже выделено много различных классов обобщенно нильпотентных групп. Между тем лишь немногие из этих классов подверглись подробному изучению. Достаточно сказать, что даже строение произвольной истинно нильпотентной группы пока не выяснено. Мне кажется, что следует направить серьезные усилия на создание глубокой теории отдельных классов нильпотентных (в широком смысле) групп и в первую очередь изучить строение произвольных ZA-групп, в частности, строение произвольных истинно нильпотентных групп. На этом пути, несомненно,

возникает необходимость и в изучении строения нильпотентных групп матриц с элементами из произвольного поля.

В заключение отметим возникновение нового направления, связанного с перенесением результатов и методов теории локально нильпотентных групп в теорию топологических групп. В этом направлении недавно получен (В. М. Глушковым) ряд глубоких результатов, могущих составить основу для дальнейшей широкой разработки теории локально нильпотентных топологических групп.

Лит.: 1. Курош А. Г., Черников С. Н., Усп. матем. наук, 2 : 3, (1947), 18—59. 2. Курош А. Г., Теория групп, М., 1953.

А. И. Ширшов (*Москва*). **О некоторых неассоциативных ниль-кольцах и алгебраических алгебрах.** Если каждый элемент a алгебры A порождает ассоциативную подалгебру конечного ранга, то алгебра A называется алгебраической. Если ранги всех подалгебр алгебраической алгебры A, имеющих один образующий, ограничены в совокупности, то алгебра A называется алгеброй ограниченной степени.

Если n-я степень каждого элемента b (при любой расстановке скобок) кольца K равна нулю, то кольцо K называется ниль-кольцом индекса n; если же существует такое натуральное число N, что произведение N любых элементов кольца K равно нулю при любой расстановке скобок, то кольцо K называется нильпотентным.

Из работ Джекобсона [2] и Левицкого [3], посвященных решению проблемы Куроша [1], известно, что конечное подмножество элементов алгебраической ассоциативной алгебры ограниченной степени порождает подалгебру конечного ранга, а конечное множество элементов ассоциативного ниль-кольца ограниченного индекса порождает нильпотентное подкольцо.

В докладе изложено доказательство аналогичных результатов для специальных $\mathfrak{J}$-колец и $\mathfrak{J}$-алгебр, а также для альтернативных колец и алгебр (т. е. таких, любые два элемента которых лежат в ассоциативном подкольце или подалгебре), если из $2a=0$ следует $a=0$.

Лит.: 1. Курош А. Г. Изв. АН СССР, сер. матем., 5 (1941), 233—240. 2. Jacobson N., Ann. of Math., 46 (1945), 695—701. 3. Levitzki I., Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946), 1033—1035.

И. М. Яглом (*Москва*). **О некоторых алгебраических особенностях вещественного симплектического пространства.** 1. Симплектическим пространством называется четномерное векторное пространство, в котором задана невырожденная кососимметрическая форма, позволяющая определить «косое» скалярное произведение векторов. В настоящем сообщении всюду имеется в виду вещественное симплектическое пространство; алгебраические свойства комплексного симплектического пространства, естественно, более просты.

2. Линейное подпространство симплектического пространства характеризуется двумя числами — *размерностью* p и *дефектом* s; лишь подпространства дефекта 0 («симплектические подпространства») сами являются симплектическими пространствами. Соответственно этому можно определить *дефект* контравариантного *поливектора* симплектического пространства, для простого поливектора совпадающий с дефектом соответствующего подпространства. Контравариантному поливектору $\boldsymbol{u}$ размерности p и дефекта s инвариантным образом сопоставляются $\frac{p-s}{2}$ новых поливекторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_{\frac{p-s}{2}}$. Если поливектор $\boldsymbol{u}$ простой, то и поливектор $\boldsymbol{u}_{\frac{p-s}{2}}$ простой; он отвечает изотропному подпространству подпространства, отвечающего u. Если $s=0$ (поливектор $\boldsymbol{u}$ — симплектический), то скаляр $\frac{1}{2^p p!}\boldsymbol{u}_{\frac{p}{2}}$ определяет *меру поливектора*, для простого поливектора совпадающую с объемом соответствующего параллелепипеда.

3. В симплектическом пространстве существуют $\left[\frac{p}{2}\right]+1$ (и только $\left[\frac{p}{2}\right]+1$)

инвариантных *скалярных произведений двух р-векторов*; все эти произведения коммутативны при четном p и антикоммутативны при нечетном. Скалярный квадрат (любого рода) поливектора отличен от нуля лишь для симплектического поливектора и снова приводит к его мере. Все $\frac{p}{2}+1$ «углов» между двумя симплектическими p-векторами, которые можно определить с помощью наших скалярных произведений, являются вещественными.

4. Вопрос о полной системе инвариантов двух линейных подпространств симплектического пространства в общем случае является довольно сложным. Он приводит к понятиям стационарных расстояний и углов двух подпространств, весьма своеобразно повторяющих соответствующие понятия эвклидовой геометрии.

5. Стационарные углы двух симплектических подпространств U и V связаны с собственными значениями симметрических операторов $A=UVU$ и $B=VUV$, где U и V — операторы проектирования на соответствующие подпространства. Если A и B не имеют элементарных делителей, то U и V имеют p стационарных углов, весьма просто связанных с «углами» между U и V, упомянутыми в п. 3.

6. В п. 5 мы столкнулись с вопросом классификации симметрических операторов симплектического пространства; решение его несущественно отличается от решения того же вопроса для комплексного симплектического пространства. В противоположность этому, кососимметрические операторы вещественного симплектического пространства имеют новые инварианты (типа сигнатуры), отсутствующие в комплексном случае.

7. Совокупность вложенных друг в друга линейных подпространств симплектического пространства размерностей 0 (точка), 1, 2, . . ., $2n$ (все пространство) естественно назвать *обобщенным линейным элементом*. Задача перечисления всех таких элементов сводится к «задаче об очереди» теории вероятностей. Соответственно этому кривые ($2n$)-мерного симплектического пространства могут иметь точки $\frac{2n!}{n!(n+1)!}$ разных типов. (Впрочем, сами кривые могут быть лишь 2^{n-1} разных типов; соответствующие «формулы Френе» приводят к интересным 2^{n-1} кососимметрическим линейным операторам симплектического пространства.)

СЕКЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Р. А. Александрян (*Ереван*). **Качественные свойства решений некоторых смешанных задач и спектральные разложения по собственным функционалам.** Доказывается корректность постановки смешанной задачи для простейшей системы дифференциальных уравнений типа Соболева. Исследование поведения решений как функций времени приводит к исследованию спектра некоторого самосопряженного оператора A. Доказывается, что исследование спектра оператора A редуцируется к изучению однородной краевой задачи для уравнения струны, содержащего параметр; эта задача в свою очередь может быть сведена к исследованию специальных топологических отображений границы области на себя.

Формулируется ряд теорем относительно характера спектра оператора A в терминах этих отображений.

Строится некоторый класс обобщенных собственных функций и указываются условия возможности построения из них гладких собственных функций или (в случае непрерывного спектра) дифференциальных решений.

Изучается вопрос о спектральных разложениях по так называемым собственным функционалам и указывается способ доказательства их полноты.

Эти результаты применяются для доказательства полноты упомянутой выше системы обобщенных собственных функций оператора A.

И. С. Аржаных (*Ташкент*). **Полевой метод в теории гиперболических систем дифференциальных уравнений математической физики.** Основой полевого метода математической физики является построение вектора по его вихрю и расхождению. Разработанные автором способы решения этой задачи позволяют выразить поле через граничные элементы. Полученные формулы применяются для построения решений некоторых гиперболических систем дифференциальных уравнений с частными производными, имеющих существенное значение для электродинамики (уравнения Максвелла), мезодинамики (уравнения Прока), теории упругости (уравнения Ляме) и в теории би-поля (уравнения, включающие произведение волновых операторов). Тем самым рассматриваемые гиперболические поля представляются через запаздывающие значения граничных элементов. Изучаются свойства возникающих запаздывающих потенциалов и на основании этих свойств для решения поставленных краевых задач устанавливаются интегро-дифференциальные уравнения с запаздывающими по времени аргументами. Для эффективного решения полученных функциональных уравнений используется операционное исчисление. Дается физическая интерпретация потенциалов простого и двойного запаздываний, устанавливается связь с ньютоновскими запаздывающими потенциалами и на основании полевой гипотезы о нуклонах предлагается формула для ядерных сил.

Е. А. Барбашин (*Свердловск*). **О работах членов Свердловского семинара по качественным методам в теории дифференциальных уравнений.** Доклад посвящен обзору результатов по теории устойчивости, полученных Е. А. Барбашиным, М. А. Скалкиной, Ю. М. Репиным, В. Г. Егоровым, З. М. Лушниковой и В. А. Табуевой.

Рассматриваются вопросы устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений, систем уравнений в конечных разностях, систем дифференциальных уравнений с запаздываниями, систем уравнений в полных дифференциалах. Дается характеристика общих методов, позволяющих исследовать вопросы устойчивости по первому приближению указанных выше систем.

Более подробно рассматриваются вопросы устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений. Для этих уравнений исследуется возможность решения задач устойчивости путем замены уравнения близкой системой дифференциальных уравнений.

Я. В. Быков (*Москва*). **Об асимптотическом поведении решений интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.** I. Рассматривается асимптотическое поведение решения уравнения

$$\frac{dy(x)}{dx} = A(x)\,y(x) + \int_a^x K(x, t)\,y(t)\,dt + f(x, y(x)) + \int_a^x F(x, t, y(x), y(t))\,dt, \qquad (1)$$

где $A(x)$ и $K(x, t)$ — квадратные матрицы, f и F — столбцевые матрицы, $y(x)$ — неизвестная столбцевая матрица порядка n.

Асимптотическое поведение решения изучается с помощью решения уравнения

$$\frac{dy(x)}{dx} = A(x)\,y(x) + \int_\tau^x K(x, t)\,y(t)\,dt, \qquad (2)$$

где $\tau \leqslant x$ — параметр; отметим, что уравнение (2) не является линейной частью уравнения (1).

II. Изучается асимптотическое поведение решения уравнения

$$L(D)\,y(x) = Ay(x) + \int_a^x \sum_{i=0}^{m} K(x-t)\,y^{(i)}(t)\,dt + f + \int_a^x F dt, \qquad (3)$$

где: $L(D)$ — однородный полином относительно операции дифференцирования D, коэффициентами которого служат квадратные постоянные матрицы (порядка n); A — квадратная постоянная матрица; $K_i(u) = \sum_{j=0}^{e_i} Q_{ij}(u)\,e^{\beta_{ij}u}$, где $Q_{ij}(u)$ — полином степени m_{ij}, коэффициентами которого служат квадратные матрицы, а β_{ij} — скалярные постоянные; f и F имеют тот же смысл, что и в уравнении (1).

Асимптотическое поведение решения уравнения (3) изучается, исходя из характера корней полинома, построенного по коэффициентам линейной части уравнения (1).

А. И. Вольперт (*Москва*). **Исследование граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости.** Работа посвящена исследованию граничных задач для эллиптических систем уравнений 1-го порядка, к которым сводится следующая граничная задача общего вида.

Задача I. Найти решение U эллиптической системы уравнений

$$\sum_{k+l\leqslant n} A_{kl}(x, y)\,\frac{\partial^{k+l}U}{\partial x^k\,\partial y^l} = F(x, y),$$

имеющее n-е непрерывные производные в D, $(n-1)$-производные, непрерывные в $D+\Gamma$ и непрерывные в смысле Гельдера на Γ, которые удовлетворяют условию

$$\sum_{k+l\leqslant n-1}\left[a_{kl}(t)\,U_{kl}^{+}(t) + \int_\Gamma b_{kl}(t, t_1)\,U_{kl}^{+}(t_1)\,ds_1\right] = f(t) \qquad (t\in\Gamma). \qquad (1)$$

Здесь A_{kl} — действительные квадратные матрицы порядка p, элементы которых — достаточно гладкие функции, заданные в некоторой области $\tilde{D}$; U, F — столбцы; D — конечная односвязная область с границей Γ, $D+\Gamma \subset \tilde{D}$; смысл обозначений в граничном условии (1) такой же, как в формулировке общей граничной задачи (задача А) в книге [1], только под a_{kl} и b_{kl} понимаются матрицы, состоящие из p столбцов и $\frac{np}{2}$ строк.

Подстановкой

$$\frac{\partial^{n-1} U}{\partial x^{k-1} \partial y^{n-k}} = u_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad u = C \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

задача I сводится к граничной задаче для системы

$$A(z) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + B(z) u + \iint\limits_D R(z, \zeta) u(\zeta) d\xi d\eta = F_1 z \qquad (z \in D) \tag{2}$$

с граничным условием

$$a(t) u(t) + \int\limits_\Gamma b(t, t_1) u(t_1) ds_1 = f_1(t) \qquad (t \in \Gamma), \tag{3}$$

где A, B, R, C — квадратные матрицы порядка np, $a(t)$, $b(t, t_1)$ — матрицы, содержащие np столбцов и $\frac{np}{2}$ строк; $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$.

Исследуется полученная граничная задача сначала при $F_1 = 0$ (задача II). Удается найти общие представления решений однородной системы (2) в виде:

$$u(z) = \int\limits_\Gamma \mathrm{M}(z, t) \mu(t) ds + N(z) \cdot c,$$

где $\mu(t)$ и c — столбцы, определяемые по u однозначно. При помощи этих представлений задача II сводится к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений с ядром типа Коши.

Предполагается, что

$$\det [a_1(t) + ia_2(t)] \neq 0 \qquad (t \in \Gamma),$$

где $(a_1, a_2) = a$.

Тогда система интегральных уравнений — нормального типа и ее индекс

$$\varkappa = \frac{1}{\pi} [\arg \det (a_1 + ia_2)]_\Gamma. \tag{4}$$

Устанавливается необходимое и достаточное условие разрешимости задачи II.

Затем рассматривается задача при однородных граничных условиях (3) и неоднородном уравнении (2) с дополнительным условием нормировки (задача III). Формулируется сопряженная граничная задача, устанавливается необходимое и достаточное условие разрешимости задачи III и доказывается, что разность между числом линейно независимых решений однородной задачи III и однородной сопряженной с ней задачи равна $\varkappa$ (см. (4)).

Исследованы вопросы непрерывной зависимости решений рассмотренных граничных задач от правой части, а также свойства матрицы Грина.

Лит.: 1. Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.—Л., 1948.

А. Ш. Габиб-Заде (*Баку*). **Исследование точек ветвления нелинейных нагруженных интегральных уравнений с различными параметрами.** Исследуется решение уравнения вида

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^1 K_i(x, s) f_i [s, \varphi(s), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)] ds, \tag{1}$$

где $K_i(x, s)$ $(i=1, \ldots, n)$ — регулярные ядра, определенные при $0 \leqslant x, \quad s \leqslant 1$, $f_i[s, \varphi(s), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)]$ — функции, аналитические относительно $\varphi(s), \varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)$ и непрерывные относительно s.

Решение данного уравнения связано с решениями линейных интегральных уравнений вида

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^1 K_i(x, s)\,\omega(s)\,ds+\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i(x)\,\omega(\alpha_i)+f(x). \tag{2}$$

Исследуется уравнение (2), а затем доказываются теоремы, характеризующие точки ветвления решений уравнения (1).

Н. И. Гаврилов (*Одесса*). **Новый метод исследования нелинейных дифференциальных уравнений, основанный на теории моментов.** Исследуется уравнение

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\rho f(\rho, \theta), \tag{1}$$

где $f(\rho, \theta)$ — целая функция относительно ρ, разлагающаяся в ряд

$$f(\rho, \theta)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\theta)\,\rho^k$$

с действительными непрерывными коэффициентами при $-\infty<\theta<+\infty$; $a_0(\theta)>0$.

Решение уравнения (1) можно записать в форме ряда

$$\rho=\sum_{n=1}^{\infty} v_n(\theta)\,\omega^n, \tag{2}$$

где $\omega=\mu e^{\int_0^\theta a_0(s)ds}$, μ — параметр.

Будем считать θ фиксированным числом, а ω — формальной комплексной переменной. Тогда ряд (2) можно рассматривать как элемент некоторой аналитической функции $\rho(\omega)$, которую условимся называть главным решением уравнения (1).

Основная задача — найти, при каких условиях главное решение $\rho(\omega)$ уравнения (1) представляется в форме интеграла Стильтьеса

$$\rho=\int_0^1 \frac{d\sigma(\tau; \theta)}{\tau+\frac{\Pi}{\omega}}, \tag{3}$$

где $\Pi(\theta)>0$, $-\infty<\theta<+\infty$, $\sigma(\tau; \theta)$ — неубывающая функция τ с ограниченной вариацией на $[0,1]$.

Очевидно, основная задача эквивалентна задаче разрешимости для ряда (2) степенной проблемы моментов на конечном интервале. Эта задача для уравнения (1) не только до сих пор не решалась, но даже и не ставилась.

В работе получены достаточные условия для разрешимости этой задачи. Ввиду ограниченности места мы здесь не формулируем этих условий; подчеркнем лишь, что класс уравнений (1), для которых разрешима основная задача, является достаточно широким. Интегральное представление (3) решения уравнения (1) является основным результатом работы.

Из формулы (3) вытекает ряд следствий.

Следствие I. Разложим ряд (2) в непрерывную дробь. Ее коэффициенты вполне определены, так как они выражаются через $v_1(\theta), v_2(\theta), \ldots$, а последние легко находятся по правой части уравнения (1). Из формулы (3) следует, что эта дробь сходится на всей оси $-\infty<\theta<+\infty$ к решению уравнения (1). Подходящие дроби изображаются кривыми, берущими решение «в вилку». При этом легко находится величина отклонения подходящей дроби от решения. Процесс сходится весьма быстро и притом на всей оси, что является существенным преимуществом перед известными классическими методами интегрирования дифференциальных уравнений, так как эти последние методы — локальные.

Следствие II. В случае, когда коэффициенты $a_n(\theta)$ функции $f(\rho, \theta)$ — периодические, периода 2π, получены достаточные условия существования периодического решения уравнения (1). Его точная формула

$$\rho = \int_0^1 \frac{d\sigma(\tau; \theta)}{\tau}. \tag{4}$$

Приведен приближенный метод нахождения периодического решения, основанный на интегральном представлении (3). Дана оценка точности аппроксимации.

Следствие III. Из формулы (3) вытекает, что если в некоторой системе

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= Y(x, y) \end{aligned} \tag{5}$$

положить $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, то уравнение траекторий системы примет как раз вид (1).

Динамическую систему (5) можно рассматривать как группу операторов S_t обобщенного сдвига.

Оператор S_t — нелинейный и его часто изучают (например, в спектральной теории динамических систем) косвенным путем, связывая с ним некоторый унитарный оператор U_t. Группа операторов U_t имеет интегральное представление

$$(U_t f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{its} d(E_s f, f)$$

(формула Стона). Формулу (3) можно рассматривать как непосредственное интегральное представление группы нелинейных операторов S_θ; функцию $\sigma(\tau; \theta)$ при этом можно рассматривать как «спектральную функцию» нелинейного оператора S_θ.

Здесь не может быть, конечно, полной аналогии с теорией линейных операторов. Однако $\sigma(\tau; \theta)$ обладает рядом свойств, аналогичных свойствам спектральной функции эрмитова оператора. Мы приходим, таким образом, к новому понятию спектральной функции нелинейного оператора S_θ. Это понятие достаточно плодотворно, как видно из сказанного выше, так как $\sigma(\tau; \theta)$ входит в формулу (3), а из нее получаются важные следствия, позволяющие подробно изучить систему (5) и уравнение (1).

М. Б. Гагуа (*Тбилиси*). **О полноте систем гармонических функций.** Рассматривается полнота (в смысле метрики L_2) системы функций

$$r_{p_i}^{-n-1} P_n^m (\cos\theta_{p_i})^{\cos m\varphi_{p_i}}_{\sin m\varphi_{p_i}} \quad (m \leqslant n,\ n,\ i = 0, 1, \ldots), \tag{1}$$

где $p_i\ (i = 0, 1, 2\ldots)$ — произвольная фиксированная последовательность точек трехмерного пространства, r_{p_i}, θ_{p_i}, φ_{p_i} — сферические координаты точки $M = M(x, y, z)$ относительно центра p_i, а $P_n^m(x)$ — присоединенные функции Лежандра. В частности, при некоторых общих предположениях относительно области D доказывается, что в классе гармонических функций, квадратично суммируемых в данной области, система (1) полна. Устанавливается также предложение, являющееся аналогом метрического критерия М. В. Келдыша полноты обычных полиномов от z комплексной переменной.

Эти предложения легко распространяются на случай пространства произвольного конечного измерения. При этом они находят свое непосредственное применение в вопросах приближенного решения линейных граничных задач, связанных с уравнением Лапласа.

С. А. Гальперн (*Москва*). **Задача Коши для уравнений типа С. Л. Соболева.**
1. Работа посвящена нахождению фундаментального решения и тем самым решению в явном виде задачи Коши для уравнения:

$$\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} + f(t, x_1, \ldots, x_n), \tag{A$_1$}$$

где Δu — оператор Лапласа по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Пусть

$$u|_{t=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x_1, \ldots, x_n) \tag{A$_2$}$$

начальные условия задачи. Функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ определены во всем пространстве и удовлетворяют некоторым условиям гладкости, указанным дальше.

Хорошо известно [1], что, умея решать задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial^2(\Delta u)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \tag{B$_1$}$$

с начальными условиями:

$$u|_{t=0} = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0 \tag{B$_2$}$$

(назовем эту задачу задачей (B)), легко найти решение первоначально поставленной задачи, поэтому будем решать задачу (B).

Доказывается, что решение задачи (B) можно записать при помощи формулы

$$u(t, x_1, \ldots, x_n) = \int \Delta^{(s)}\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, H^{(s)}(t, x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n. \tag{1}$$

В этой формуле $\Delta^{(s)} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1^2} + \ldots + \frac{\partial}{\partial \xi_n^2}\right)^s$ — полигармонический оператор порядка s, а $H^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n)$ — фундаментальное решение, для которого получены следующие явные выражения:

а) если n нечетно, то при $s = \frac{n-1}{2}$ имеем:

$$H^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi}{(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{r} \frac{Y_{\frac{n-3}{2}}\left(\frac{t\rho}{r}\right)}{\left(\frac{t\rho}{r}\right)^{\frac{n-3}{2}}}, \tag{2}$$

где $r^2 = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$, а $\rho^2 = y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2$. При любом другом значении s, удовлетворяющем неравенству

$$1 \leqslant s \leqslant \frac{n-1}{2},$$

также получены явные выражения для $H^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n)$ (см. [2]), причем

$$H^{(s)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \Delta H^{(s+1)}(t, y_1, \ldots, y_n) \tag{3}$$

и, в частности,

$$H^{(1)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \Delta^{\frac{n-3}{2}} H^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(t, y_1, \ldots, y_n).$$

При $n = 3$ формула (2) дает фундаментальное решение, найденное С. Л. Соболевым [3].

б) Если n четно, то при $s = \frac{n-2}{2}$ и $n \geqslant 4$ имеем

$$H^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(t, y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{r^2} \left[\frac{Y_{\frac{n-4}{2}}(t)}{t^{\frac{n-4}{2}}} + \frac{Y_{nt}}{r} \int\limits_{\frac{\rho t}{r}}^{t} \frac{\xi \cdot Y_{\frac{n-4}{2}}(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\xi^2 - \frac{\rho^2 t^2}{r^2}}\, \xi^{\frac{n-4}{2}}} \right].$$

В этом случае также справедливо соотношение (3), поэтому

$$H^{(1)}(t, y_1, \ldots, y_n) = \Delta^{\frac{n-4}{2}} H^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(t, y_1, \ldots, y_n).$$

2. Формула (1) дает решение, если выражение $\frac{1}{r^{n-2s}} \Delta^s \varphi$ абсолютно интегрируемо. В частности, полагая $s = 1$, мы видим, что достаточно предположить интегрируемость выражения $\frac{1}{r^{n-2}} \Delta\varphi$.

3. Результаты получены применением метода Фурье в том виде, как это сделано И. Г. Петровским [4].

4. Получены также некоторые результаты для систем линейных уравнений, не разрешенных относительно производной по переменной t, если данные Коши задаются при $t = t_0$.

Лит.: 1. Курант Р., Гильберт Д., Методы математич. физики, т. 2, 1951. 2. Гальперн С. А., ДАН СССР **104**, № 6 (1955), 815—818. 3. Соболев С. Л., Изв. АН СССР, сер. матем., 18, № 3, (1954), § 13. 4. Петровский И. Г., Бюлл. МГУ, 1, в. 7, (1938).

Ф. Д. Гахов (*Ростов на Дону*), **Л. И. Чибрикова** (*Казань*). **Некоторые типы сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме.** В работе изучаются такие типы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, решение которых может быть, подобно простейшему случаю характеристических уравнений, приведено к решению краевой задачи Римана и на основе этого дано в замкнутой форме. Ядра таких уравнений характеризуются тем, что они при подстановках некоторой группы или остаются инвариантными или приобретают некоторый множитель. В связи с этим в качестве аппарата при их решении используются автоморфные функции.

В первой части рассматриваются уравнения, решаемые на основе теории автоморфных функций с конечной группой. Работа эта напечатана в журнале «Математический сборник» (т. 35 : 3, 1954, 395—436), и поэтому мы здесь не останавливаемся на ее содержании. Следует только отметить, что в этой работе допущена одна существенная погрешность, именно, не учтено, что в тех случаях, когда ядро уравнения, аналитически продолженное в комплексную плоскость, не обращается на бесконечности в нуль, между решениями однородного уравнения можно установить одно линейное соотношение и, следовательно, число линейно-независимых решений уменьшается на единицу.

Во второй части рассматриваются уравнения вида

$$a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int \frac{F'(\tau)}{F(\tau) - F(t)}\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t), \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ — заданные функции, удовлетворяющие условию Гельдера, $F(t)$ — основная простая автоморфная функция, принадлежащая некоторой функциональной (фуксовой или элементарной) группе подстановок, имеющая в фундаментальной области группы один простой полюс, L_0 — контур, целиком лежащий в фундаментальной области группы, $\varphi(t)$ — искомая функция.

Путем введения аналитической автоморфной функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \varphi(\tau)\, \frac{F'(\tau)}{F(\tau) - F(z)}\, d\tau$$

интегральное уравнение (1) приводится к краевой задаче Римана

$$\Phi^+(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\Phi^-(t)+\frac{f(t)}{a(t)+b(t)} \tag{2}$$

на контуре L_0, решение которой должно быть автоморфной функцией, принадлежащей заданной группе. На основе решения краевой задачи (2) дается в замкнутой форме решение уравнения (1).

Рассматриваются некоторые типы сингулярных уравнений с однопериодическими и двоякопериодическими ядрами; исследуются вопросы обтекания периодических решеток. Оба эти вопроса решаются путем сведения к краевым задачам Римана для однопериодических или двоякопериодических аналитических функций.

А. О. Гельфонд (*Москва*). **Об оценках некоторых детерминантов и приложении этих оценок к распределению собственных значений.** В работе доказан ряд оценок величин детерминантов типа Вандермонда. Основной из этих оценок является следующая.

Пусть $0\leqslant\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_n$, $0\leqslant x_k\leqslant 1$ $(0\leqslant k\leqslant n)$, $\delta>0$ и $0\leqslant\varepsilon\leqslant 1$. Тогда

$$\left\|\begin{matrix} x_0^{\alpha_0}x_0^{\alpha_1}\ldots x_0^{\alpha_n}\\ x_1^{\alpha_0}x_1^{\alpha_1}\ldots x_1^{\alpha_n}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ x_n^{\alpha_0}x_n^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}\end{matrix}\right\|\prod_0^n x_s^{\delta}(1-x_s)^{\varepsilon}<(\delta+\alpha_1)^{-\frac{\varepsilon}{3}n-\varepsilon}e^{-\theta n^{\frac{3}{2}}+\gamma n\ln n},$$

где $\theta=\frac{2\sqrt{2}}{9}\sqrt{\varepsilon}$, а γ от $n,\alpha_0,\ldots,\alpha_n$ и $x_1,\ldots,x_n$ не зависит.

Из этих оценок следует теорема относительно собственных значений интегрального уравнения

$$f(x)=\lambda\int_0^1 k(x,s)f(s)\,ds. \tag{1}$$

Теорема. Пусть ядро $k(x,y)$ удовлетворяет условиям:

1) на отрезке $[0,1]$ $k(x,y)$ удовлетворяет неравенству

$$|k(x,y)|<\frac{c}{[xy(1-x)(1-y)]^{\frac{1}{2}-\delta}},\quad \frac{1}{2}\geqslant\delta>0,\quad c>0; \tag{2}$$

2) $k(x,y)$ аналитическое и регулярное по y при всяком $x>0$ внутри луночки

$$\left|z-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{2q}}\right|\leqslant\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{2q}},\quad q\geqslant 1, \tag{3}$$

где q задано;

3) во всякой внутренней подобласти луночки (4), с контуром

$$z=\frac{[1+(1-2\varepsilon)e^{i\varphi}]^{\frac{1}{q}}}{[1+(1-2\varepsilon)e^{i\varphi}]^{\frac{1}{q}}+[1-(1-2\varepsilon)e^{i\varphi}]^{\frac{1}{q}}},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$

при любом ε, $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, выполняется неравенство

$$|k(x,z)|<\frac{c}{[x(1-x)]^{\frac{1}{2}-\delta}}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{p}{q}},\quad p\geqslant 0, \tag{4}$$

где $p \geqslant 0$ задано.

Тогда для собственных значений уравнения (1) выполняются неравенства

$$|\lambda_n| > A \cdot e^{\mu n^{\frac{1}{2}}}, \quad A > 0, \quad \mu = \mu(p, q, \delta),$$

где A и μ — постоянные, от n не зависящие.

Эта теорема не может быть улучшена в следующем смысле: для собственных значений ядра $k(x, y) = \frac{(1-x)^m (1-y)^m}{1-xy}$, $m > 0$ — целое число, имеет место оценка

$$\alpha \sqrt{n} < \ln |\lambda_n| < \beta \sqrt{n}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

при $n > n_0$, где α и β — постоянные.

Теорема остается в силе, с другими постоянными, если мы разобьем отрезок [0, 1] на конечное число отрезков и на каждом из них потребуем выполнения условий (2), (3) и (4), сформулированных, соответственно, для каждого из отрезков.

И. С. Градштейн (*Москва*). Задача Коши и асимптотические ряды для решения систем дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных.

Предельные теоремы (задача Коши). 1. Для систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x, y, \eta) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{1a}$$

$$\eta \frac{dy_s}{dt} = h_s(t, x, y, \eta) \quad (s = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{1б}$$

где η — малый множитель, дается достаточный критерий для того, чтобы решение этой «возмущенной» системы на конечном временном промежутке $0 < t \leqslant T$ было близко к решению «идеальной» системы

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x, y, 0) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{2a}$$

$$0 = h_s(t, x, y, 0) \quad (s = 1, 2, \ldots, \mu). \tag{2б}$$

2. Приводится аналогичная теорема для системы почти линейных гиперболических, в узком смысле, уравнений с двумя независимыми переменными

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(t, x, \eta) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^{\mu} b_{ij}(t, x, \eta) \frac{\partial v_j}{\partial x} + f_i(t, x, u, v, \eta) \; (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{3a}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij}(t, x, \eta) \frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_{j=1}^{\mu} \beta_j(t, x, \eta) \frac{\partial v_j}{\partial x} + \frac{1}{\eta} h_s(t, x, u, v, \eta) \quad (s = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{3б}$$

для которой при $t = 0$ заданы начальные значения $u(t, x, \eta)$, $v(t, x, \eta)$.

3. Аналогичное утверждение имеет место и для некоторых классов линейных гиперболических в смысле Петровского систем с n $(n > 2)$ независимыми переменными.

Асимптотические ряды. 4. Даются (при условии выполнения теоремы п. 2) асимптотические ряды по степеням малого параметра для решений гиперболических в узком смысле линейных систем с двумя независимыми переменными вида

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x}+\sum_{j=1}^{\mu} b_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x}+\sum_{j=1}^{m} c_{ij}u_j+\sum_{j=1}^{\mu} g_{ij}v_j+f_i, \tag{4а}$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_{sj}\frac{\partial u_j}{\partial x}+\sum_{j=1}^{\mu}\beta_{sj}\frac{\partial v_j}{\partial x}+\frac{1}{\eta}\left\{\sum_{j=1}^{m}\gamma_{sj}u_j+\sum_{j=1}^{\mu}\varkappa_{sj}v_j+h_s\right\}, \tag{4б}$$

где коэффициенты и свободные члены представляют собой степенные по η ряды, сходящиеся на отрезке $[-\eta_0, +\eta_0]$. Коэффициентами в этих рядах служат, вообще говоря, функции от t и x.

5. Приводится аналогичная теорема о разложении в асимптотические ряды решений одного класса линейных гиперболических уравнений со многими независимыми переменными.

Обобщенная задача Коши. 6. Для линейного уравнения вида

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(t, \eta)\frac{d^k x}{dt^k}+\sum_{k=1}^{\mu}\eta^k a_{m+k}(t, \eta)\frac{d^{m+k}x}{dt^{m+k}}=0, \tag{5}$$

где коэффициентами служат степенные по η ряды, сходящиеся на отрезке $[-\eta_0, +\eta_0]$, решается вопрос о связи между начальными значениями решений «возмущенного» уравнения (5) и начальными значениями решения «идеального» уравнения

$$\sum_{k=0}^{m} a_k(t, 0)\frac{d^k x}{dt^k}=0. \tag{6}$$

Находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы решение уравнения (5) при данных начальных значениях стремилось к решению уравнения (6).

7. Для линейных систем, о которых шла речь в п. 4 и 5, решается аналогичный вопрос о «сдвиге» решений идеальной системы, когда в возмущенной системе некоторые из начальных значений $v_i(0, x, \eta)$ имеют вид

$$\eta^{-1}v_{i,-1}(0, x)+0(1)$$

(т. е. стремятся к бесконечности при $\eta\to+0$).

И. Гурьянов (*Йошкар-Ола*)**. К аналитической теории интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра.** Пусть дано уравнение

$$\frac{du(z)}{dz}=A(z)u(z)+\int_a^z K(z, t)u(t)\,dt+f(z), \tag{1}$$

где $A(z)$ и $K(z, t)$ — квадратные матрицы, $u(z)$ и $f(z)$ — столбцевые матрицы порядка n, z — комплексная переменная. Предполагается, что $A(z)$, $K(z, t)$, $f(z)$ (коэффициенты уравнения) — однозначные аналитические функции, которые в рассматриваемой области могут иметь только изолированные особые точки.

В работе изучается характер особой точки решения в зависимости от характера особых точек коэффициентов уравнения (1).

А. И. Гусейнов (*Баку*), **А. М. Абасов** (*Баку*). **Исследование свойств нелинейных сингулярных операторов.** 1. Исследуется нелинейный сингулярный оператор

$$Au=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi[x, s;\, u(s);\, \lambda]\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds$$

в пространствах $H_{(-\pi,\pi)}$ и L_2.

2. Пусть $H_{(\alpha, \beta, \delta)}$ — пространство функций, удовлетворяющих условиям:

$$|u(x)| < \frac{L}{|x-a|^{\alpha}|x-b|^{\beta}},$$

$$|u(x+\Delta x)-u(x)| < \frac{L}{|x-a|^{\alpha}|x+\Delta x-b|^{\beta}}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a||x+\Delta x-b|}\right)^{\delta}.$$

В этом пространстве вводится метрика и исследуются свойства оператора

$$Bu=\int_a^b \frac{K(x, s; u(s))}{s-x}\,ds.$$

3. В пространстве L_2 изучаются операторы

$$A\varphi=\int_{\Gamma}\frac{R(t, \tau; \varphi(\tau))}{\tau-t}\,d\tau, \quad Bu=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R(x, s, \varphi(s))}{s-x}\,ds.$$

4. В $L^p(\Gamma)$ рассматривается оператор

$$A\varphi=F\left[t,\ \varphi(t);\ \int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau\right].$$

Б. П. Демидович (*Москва*). **Ограниченные решения некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений.** Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=Ax+\varphi(t, x, \mu), \tag{1}$$

где x есть n-мерный вектор, A — постоянная матрица, не имеющая характеристических чисел с вещественной частью, равной нулю, μ — малый параметр, $\varphi(t, x, \mu)$ — непрерывная вектор-функция, такая, что $\varphi(t, x, 0)/\|x\| \rightrightarrows 0$ при $\|x\| \to \infty$; при этом предполагается, что обеспечены существование и единственность решений системы (1). Даются достаточные условия существования и единственности решения системы (1), ограниченного на всей бесконечной оси $-\infty < t < +\infty$, усиливающие теорему Боля. Для доказательства используется топологический принцип Важевского. Доказывается, что если $\varphi(t, x, \mu)$ — почти периодическая по t, то ограниченное решение системы (1) также почти периодическое. Даются некоторые обобщения основной теоремы.

В. Г. Егоров (*Свердловск*). **Устойчивость решений систем уравнений в полных дифференциалах.** Рассматриваются системы уравнений в полных дифференциалах вида

$$dx=P(u, x)\,du+Q(v, x)\,dv, \tag{1}$$

где x, $P(u, x)$, $Q(v, x)$ — столбцевые матрицы, u, v — параметры. Матрицы $P(u, x)$, $Q(v, x)$ определены в области

$$|x_s| \leqslant n \quad (s=1, \ldots, n), \quad u \geqslant 0, \quad v \geqslant 0,$$

удовлетворяют в этой области условиям интегрируемости

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial P_s}{\partial x_r}Q_r=\sum_{r=1}\frac{\partial Q_s}{\partial x}P_r, \tag{2}$$

а в начале координат ($x_1=\ldots=x_n=0$) обращаются в нуль.

Вводится понятие устойчивого и асимптотически устойчивого нулевого решения системы (1) и устанавливаются соответствующие критерии.

При

$$P(u, x)=p(u)\,x, \quad Q(v, x)=q(v)\,x,$$

где $p(u)$, $q(v)$ — квадратные матрицы, условие (2) обращается в условие перестановочности матриц p и q. В связи с этим проводится изучение влияния перестановочности матриц на свойства решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений, порожденных системой (1) (устойчивость, правильность, приводимость).

При $P(u, x) = p(u)x$, $Q(v, x) = q(v)x$ рассматривается также вопрос приводимости систем (1) к системам вида

$$dx = Axdu + Bxdv,$$

где A, B — постоянные матрицы.

О. А. Жаутыков (*Алма-Ата*). **К вопросу о построении интегралов уравнений в частных производных первого порядка для счетного множества независимых переменных.** Рассмотрим линейное уравнение вида

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t, x_1, x_2, \ldots) \frac{\partial z}{\partial x_k} = f(t, x_1, x_2, \ldots), \tag{1}$$

в котором коэффициенты a_k и f зависят от счетного множества переменных $t, x_1, x_2, \ldots$.

Результаты, относящиеся к уравнению (1), можно выразить в виде следующей теоремы.

Пусть в области H: $|t| \leqslant T$, $|x_k| \leqslant R$ $(k = 1, 2, \ldots)$ коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям:

а) функции a_k и f заданы, непрерывны, равномерно ограничены и обладают непрерывными, равномерно ограниченными производными первого порядка;

б) коэффициенты a_k при заданных значениях переменных $x_1, x_2, \ldots$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\partial a_s}{\partial x_k}\right| \leqslant B(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

и усиленному неравенству Коши—Липшица:

$$\begin{aligned} a_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x'_m, x'_{m-1}\ldots) - a_s(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x''_m, x''_{m+1}, \ldots)| \leqslant \varepsilon_m \Delta x, \\ |f(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x'_m, x'_{m+1}, \ldots) - f(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x''_m, x''_{m+1})| \leqslant \varepsilon_m \Delta x, \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\Delta x = \sup[|x'_m - x''_m|, |x'_{m+1} - x''_{m+1}|, \ldots] \text{ и } \varepsilon_m \to 0 \text{ при } m \to \infty;$$

в) a_k и f удовлетворяют еще условиям:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial a_s}{\partial x'_k} - \frac{\partial a_s}{\partial x''_k} \leqslant A\Delta x \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\partial f}{\partial x'_k} - \frac{\partial f}{\partial x''_k}\right| \leqslant A\Delta x, \tag{3}$$

где A — постоянное число, а $\Delta x = \sup[|x'_1 - x''_1|, \ldots]$.

Пусть, кроме того, задана функция $\omega(x_1, x_2, \ldots)$ непрерывная, равномерно ограниченная, имеющая непрерывные, равномерно ограниченные производные первого порядка в области G : $|x_k| \leqslant \delta < R$ и удовлетворяющая в этой области условиям (2) и (3).

Тогда уравнение (1) имеет и притом единственное непрерывное решение $z = z(t, x_1, x_2, \ldots)$, обращающееся в заданную функцию $\omega(x_1, x_2 \ldots)$ при $t = 0$ и имеющее непрерывные производные первого порядка в области D : $0 \leqslant t \leqslant t_0 < T$, $|x_k| \leqslant \delta < R$. При этом решение выражается формулой

$$z(t, x_1, x_2, \ldots) = \omega(\varphi_1, \varphi_2, \ldots) + \int_0^t f(\tau, \varphi_1, \varphi_2, \ldots) d\tau,$$

где φ_s — первые интегралы однородного уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t,\ x_1,\ x_2,\ldots)\frac{\partial z}{\partial x_k}=0.$$

Эти результаты легко перенести на линейное уравнение вида

$$\frac{\partial z}{\partial t}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t,\ x_1,\ x_2,\ldots;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ldots)\frac{\partial z}{\partial x_k}=zf(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ldots)+ \\ +g(t,\ x_1,\ x_2,\ldots;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ldots). \tag{4}$$

Так как построение интеграла уравнения (4) тесно связано с характером решения бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то естественно приходится останавливаться на некоторых свойствах счетной системы:

$$\frac{dx_s}{dt}=\omega_s(t,\ x_1,\ x_2,\ldots;\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ldots)\quad (s=1,\ 2,\ldots), \tag{5}$$

содержащей, кроме счетного множества переменных $t,\ x_1,\ldots$, и счетное множество параметров $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots$.

Для системы (5) доказаны теоремы о равностепенной непрерывности и непрерывной дифференцируемости ее решения по параметрам $\lambda_1,\ \lambda_2,\ldots$. Распространена известная теорема Каратеодори о существовании и единственности решения для конечной системы уравнений на счетную систему (5).

Для уравнения (4) доказана теорема существования и единственности решения начальной задачи.

Для нелинейного уравнения

$$p=f(t,\ x_1,\ x_2,\ldots;\ z,\ p_1,\ p_2,\ldots), \tag{6}$$

где

$$p=\frac{\partial z}{\partial t},\quad p_k=\frac{\partial z}{\partial x_k}\quad (k=1,\ 2,\ldots),$$

доказана теорема:

Если в некоторой области H: $|t-t_0|\leqslant a$, $|x_k|\leqslant R$ $(k=1,\ 2,\ldots)$ при $|z|\leqslant C$, $|p_k|\leqslant N$ $(k=1,\ 2,\ldots)$ функция f непрерывна, равномерно ограничена, имеет непрерывные, равномерно ограниченные частные производные до второго порядка включительно и если сама функция f и ее частные производные первого порядка удовлетворяют условиям (2) и (3), то уравнение (6) имеет в области S: $|t-t_0|\leqslant h<a$, $|x_k|\leqslant\delta<R$ единственное, непрерывно дифференцируемое решение $z=\psi(t,x_1,x_2,\ldots)$, удовлетворяющее начальному условию $\psi|_{t=t_0}=\omega(x_1,x_2,\ldots)$, где начальная функция ω непрерывна, дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет вместе со своими производными первого порядка условиям (2) и (3).

Т. Я. Загорский (*Львов*). **Некоторые смешанные задачи для параболических систем.** I. Рассматривается следующая задача: найти вектор-функцию U, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial t}=A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U \tag{1}$$

и условиям

$$U\Big|_{t=+0}=0,\quad B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)U(x,\ t)\Big|_{x_n=+0}=f(x',\ t);$$

система (1) параболична в смысле Петровского, матрицы $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ и $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ определяются с помощью соотношений

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left\|\sum_{k_1+\ldots+k_n=s} a_{ij}^{k_1\ldots k_n}\frac{\partial^s}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\right\|\quad (i=1,\ 2,\ldots,\ N,\ \ j=1,\ 2,\ldots,\ N),$$

$$B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left\| \sum_{k_1+\ldots+k_n=q_i} b_{ij}^{k_1\ldots k_n} \frac{\partial^{q_i}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} \right\| \quad \left(i=1,\ 2,\ldots,\frac{sN}{2},\quad j=1,\ 2,\ldots,\ N\right),$$

где $a_{ij}^{k_1\ldots k_n}$, $b_{ij}^{k_1\ldots k_n}$ — постоянные числа, s — четное число, q_i — целое, меньшее S; функция $f(x',\ t)$ $(x'=(x_1,\ldots,\ x_{n-1}))$ непрерывна, причем

$$|f(x',\ t)|< A(x')\,e^{\sigma_0 t},\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} A(\xi')\,d\xi'<\infty,\qquad \sigma_0>0;$$

кроме того, предполагается выполнение условия разрешимости, означающего обратимость некоторой матрицы.

В работе строится решение этой задачи и даются оценки функции Грина.

II. Рассматривается подобная задача для конечной части пространства: найти функцию u, удовлетворяющую системе (1) в области V, ограниченной замкнутой выпуклой поверхностью S типа Ляпунова, и удовлетворяющую условиям

$$U\,|_{t=+0}=0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to y\in S\,(x\in V)} B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) U(x,\ t)=f(y,\ t).$$

При этом мы считаем, что для матрицы $B\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ все числа $q_i=q<s$.

С помощью функции Грина краевой задачи для полупространства изучаемая задача приводится к интегральным уравнениям; доказывается их разрешимость.

Е. И. Ким (*Ростов на Дону*). **Об одном классе сингулярных интегральных уравнений.** Рассматривается интегральное уравнение

$$\varphi(p,\ t)=\lambda\int_0^t d\tau\int_C K_0(r_{pp_1}^2,\ t-\tau)\,\varphi(p_1,\ \tau)\,ds_{p_1}+$$
$$+\int_0^t d\tau\int_C K_1(p,\ p_1,\ t-\tau)\,\varphi(p_1,\ \tau)\,ds_{p_1}+f(p,\ t). \tag{1}$$

В этом уравнении заданная функция $f(p,\ t)$ удовлетворяет неравенствам

$$|f(p,\ t)|,\ \left|\frac{\partial f(p,\ t)}{\partial s_p}\right|\leqslant\frac{M}{t^{\alpha}},\qquad \sigma<1,$$

$K_1(p,\ p_1,\ t-\tau)$ — регулярное ядро, $K_0(r_{pp_1}^2,\ t-\tau)$ — сингулярное ядро, определяемое следующей формулой:

$$K_0(r_{pp_1}^2,\ t-\tau)=\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}}\int_0^{\infty}\rho(z)\,e^{-\frac{r_{pp_1}^2}{4a^2(z)(t-\tau)}}\left[1-\frac{r_{pp_1}^2}{2a^2(z)(t-\tau)}\right]dz,$$

где

$$\rho(z)=\frac{1}{(z^2+a_1^2)^{3/2}(z^2+a_2^2)^{1/2}},\qquad a^2(z)=a_2^2\,\frac{z^2+a_1^2}{z^2+a_2^2},$$

r_{pp_1} — расстояние между двумя точками p, p_1 кривой C.

Доказывается, в частности, что уравнение (1) при $K_1(p,\ p_1,\ t-\tau)\equiv 0$ и при достаточной гладкости контура C имеет единственное решение в классе функций, удовлетворяющих условию Гельдера, если

$$\lambda<\frac{a_1(a_1+a_2)}{2\pi^{3/2}}.$$

А. И. Кошелев (*Ленинград*). **Ограниченность в L_p обобщенных решений эллиптических уравнений.** В докладе рассматривается задача Дирихле для нелинейных эллиптических уравнений. Сначала рассматривается квазилинейное уравнение

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x;\ u,\ p)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + b(x;\ u,\ p) = 0, \quad \text{где} \quad p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

$$\left(\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k > \lambda_0 \sum_{i=1}^{n}\xi_i^2 \qquad \lambda_0 > 0\right).$$

Доказывается, что задача Дирихле может быть записана в виде функционального уравнения $P(u) = 0$, где $P \in \left[W_p^{(2)}(\Omega) \to L_p(\Omega)\right]$ и Ω — некоторая конечная облáсть с границей Γ.

Задача Дирихле для общего нелинейного эллиптического уравнения

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k},\ \frac{\partial u}{\partial x_j},\ u;\ x\right) = 0$$

также может быть записана в виде функционального уравнения

$$P(u) = 0, \ \text{где} \ P \in [W_p^{(3)}(\Omega) \to L_p(\Omega)].$$

Обратимость линеаризированного оператора гарантируется следующей теоремой.

Теорема. Если граница области Ω достаточно гладкая и $f \in W_p^{(k)}(\Omega)$, то (при соответствующих предположениях о коэффициентах) однородная задача Дирихле для линейного эллиптического уравнения

$$\sum_{i,\,k=1}^{n} a_{ik}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)\,u = f(x)$$

в случае единственности решения имеет обобщенное решение

$$u \in W_p^{(k+2)}(\Omega) \qquad (p > 1)$$

и выполняется неравенство

$$\| u \|\ W_p^{(k+2)}(\Omega) \leqslant C \,\| f \|\ L_p(\Omega),$$

где C — постоянная, не зависящая от u и f.

Допустим, что общее эллиптическое уравнение записывается в виде

$$F_\lambda + \lambda F_H = 0,$$

где F_λ — линейная и F_H — нелинейная часть. Тогда доказывается, что при достаточно малом λ задача Дирихле имеет решение.

Продолжимость решения по параметру λ зависит от априорных оценок для предполагаемого решения в нормах. Соответствующие оценки получаются для квазилинейной задачи и являются некоторым обобщением априорных оценок С. Н. Бернштейна, полученных для двух переменных. Существенным в получаемых нами оценках является порядок возрастания коэффициентов a_{ik} и b_j и некоторых их линейных комбинаций.

Аналогичные результаты получаются для сильноэллиптических систем второго порядка.

М. И. Кучмар (*Ташкент*). **О нéкоторых теоремах существования и единственности для одного нелинейного интегрального уравнения общего вида.** В работе рассматривается нелинейное интегральное уравнение вида

$$u(x) = \varphi\left[x, \int \Gamma_1(x, y, u(y))\,dy, \int \Gamma_2(x, y, u(y))\,dy, \ldots \int \Gamma_n(x, y, u(y))\,dy\right].$$

Для этого уравнения устанавливается ряд теорем существования решений. Исследования проводятся топологическими методами путем применения принципов Немыцкого—Шаудера и Каччополи—Банаха в пространствах C, L_2, и L_p.

Е. М. Ландис *(Москва)*. **О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений.** Устанавливаются некоторые свойства решений линейных эллиптических уравнений второго порядка

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = 0 \tag{1}$$

с переменными коэффициентами. Относительно коэффициентов уравнения (1) предполагается, что a_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ обладают непрерывными производными $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_i}$, $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k}$ и $\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}$, b_i $(i = 1, \ldots, n)$ — непрерывными производными $\frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ и что все коэффициенты и указанные производные ограничены по модулю единицей в той области, где рассматривается уравнение. Далее, предполагается, что в этой области

$$\sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k > \alpha > 0 \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = 1. \tag{2}$$

Доказываются следующие теоремы.

Теорема 1 (основное неравенство). Пусть G — шар в R_n радиуса, равного единице, с центром в начале координат. Пусть S — его граница. Пусть γ_a — часть S, определяемая соотношениями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1, \qquad \sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant a^2, \qquad x_1 > 0.$$

Тогда существует константа C, зависящая только от размерности n пространства и от α (см. неравенство (2)) и такая, что для любых $\varepsilon > 0$, a, $0 < a < \frac{1}{2}$ и для любого решения u уравнения (1), определенного в G, непрерывного вплоть до границы, обладающего на γ_a нормальной производной, для которого выполнены неравенства

$$|u|\Big|_S < 1, \qquad |u|\Big|_{\gamma_a} < \varepsilon, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial n}\right|\Bigg|_{\gamma_a} < \varepsilon,$$

имеет место неравенство

$$|u(0, \ldots, 0)| < \varepsilon^{a^C}.$$

Из теоремы 1 следуют:

Теорема 2. Задача Коши для уравнения (1) имеет не более одного решения.

Теорема 3. Решение задачи Коши для уравнения (1) в классе равномерно ограниченных функций непрерывно зависит от начальных условий.

Теорема 4. Пусть G — шар теоремы (1) и u — решение уравнения (1) в G, непрерывное вместе с частными производными вплоть до границы в окрестности некоторой точки P границы S шара G. Пусть $u(P) = 0$, $\frac{\partial u(P)}{\partial n} = 0$. Пусть, далее, функции $u(Q)$ и $\frac{\partial u(Q)}{\partial n}$ при стремлении точки $Q \in S$ к точке P убывают быстрее, чем $e^{-\frac{1}{|PQ|C}}$, где C — достаточно большая константа, зависящая только от n и α.

Тогда необходимо $u \equiv 0$ всюду в G.

Далее доказывается

Теорема 5. Пусть G — область, определяемая неравенствами

$$x_1 > 0, \quad \sum_{i=2}^{n} x_i^2 < \delta,$$

где δ — какое-либо положительное число. Пусть в области G задано решение u уравнения (1), для которого существуют такие константы C и $\varepsilon > 0$, что

$$|u(x_1, \ldots, x_n)| < Ce^{-e^{x_1^{1+\varepsilon}}}.$$

Тогда необходимо $u \equiv 0$.

Теорема 6 (принцип Фрагмена—Линделёфа). Пусть в неограниченной области G определено уравнение (1), коэффициенты которого дополнительно удовлетворяют одному из следующих двух условий:

$$1.\quad C < C_0 < 0, \quad \left|\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}\right| < \frac{2}{R^2}, \quad \left|\frac{\partial b_i}{\partial x_i}\right| < \frac{1}{R}$$

(C_0 — константа, зависящая от α);

$$2.\quad C \leqslant 0,\ b_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \quad \left|\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}\right| < \frac{1}{R^2} \quad \left(R^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right).$$

Обозначим через Q_m шар

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant q^m,$$

где $q > 1$ — некоторое число, и пусть

$$\limsup \frac{\mathrm{mes}_n (Q_m \cap G)}{\mathrm{mes}_n Q_m} < \frac{1}{M} \quad (m = 1, 2, \ldots,).$$

Пусть u — решение рассматриваемого уравнения в G и $u \leqslant 1$ на границе G.

Тогда либо $u \leqslant 1$ всюду в G, либо по некоторой последовательности точек функция u растет быстрее, чем $R^{\frac{M}{C}}$, где C — константа, зависящая от q, n и α.

С. М. Лозинский (*Ленинград*). **Оценка погрешности приближенных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.** 1. В приближенном интегрировании дифференциальных уравнений с начальными условиями можно выделить три основные задачи:

1) доказательство того, что на данном интервале изменения независимой переменной существует «точное» решение;

2) построение приближенного решения;

3) оценка погрешности приближенного решения.

Для выполнения решения задачи 2) известно много способов, приводящих на практике к хорошим результатам. При этом приближенные методы решения можно разбить на аналитические и численные.

2. Для задач 1) и 3) в литературе нет удовлетворительного решения. Существующие методы гарантируют слишком малый интервал существования «точного» решения и слишком грубую оценку погрешности приближенного решения.

3. Удалось найти новые теоремы, обеспечивающие интервал существования «точного» решения, которые по своей структуре отличны от имеющихся. В них по всякому приближенному решению указывается определенный интервал существования «точного» решения, тем больший, чем «лучше» приближенное решение. Во всех рассмотренных примерах уже простейший выбор приближенного решения (тождественно постоянное, удовлетворяющее начальным условиям) гарантировал интервал существования «точного» решения, значительно больший, чем даваемый классическими теоремами.

4. Для случая, когда правая часть дифференциального уравнения (или системы) аналитически зависит от своих аргументов, результаты, аналогичные указанным в п. 3, получены для радиуса аналитичности «точного» решения.

5. Найдены теоремы, дающие значительно более низкую оценку погрешности приближенных аналитических решений, чем классические оценки. Эти последние дают всегда мажоранту погрешности, растущую по показательному закону с возрастанием длины интервала изменения независимой переменной. В найденных теоремах мажоранта погрешности для некоторых систем уравнений и некоторых приближенных решений остается ограниченной на интервале любой длины и даже является неограниченно убывающей.

6. Для численных методов интегрирования получены результаты, аналогичные указанным в п. 5. Однако соответствующие оценки весьма громоздки и их вычисление даже для простых задач требует большой работы. Надлежит значительно упростить указанные оценки, прежде чем их можно будет применять практически. Однако и в своем настоящем виде эти оценки дают, повидимому, мажоранту погрешности одного порядка с той, которая получается из линеаризированных (нестрогих) методов оценки, основанных на применении уравнений в вариациях. Это дает основание думать, что принципиальная структура этих строгих оценок правильна.

Я. Б. Лопатинский *(Львов)*. **Об одном методе решения основной задачи теории упругости.** Доказывается, что матрица Грина основных задач теории упругости есть аналитическая функция параметра в единичном круге (при некоторых предположениях относительно области)

$$\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}.$$

Приводится также расчет этой матрицы в некоторых частных случаях.

С. А. Маркосян *(Ленинакан)*. **Применение «геометрического метода» к некоторым вопросам исследования динамической системы на плоскости.** «Геометрический метод» применяется к более общим вопросам теории интегральных кривых на всей плоскости системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\qquad \frac{dy}{dt}\,Q(x,\ y), \tag{1}$$

чем это делалось до сих пор.

В предположении, что $x=y=0$ — единственная особая точка в области исследования, рассматриваются вопросы расположения интегральных кривых типа седла, асимптотической устойчивости в целом тривиального решения, существования предельных циклов системы (1).

Оказывается, что для выделения случаев седлообразного расположения интегральных кривых достаточно знание расположения изоклин $P(x,\ y)=0$, $Q(x,y)=0$ и знаков правых частей уравнений между этими изоклинами. Это, однако, не всегда имеет место при рассмотрении вопросов асимптотической устойчивости. В тех случаях, когда знания лишь этих характеристик недостаточно для установления асимптотической устойчивости в целом тривиального решения, функции P и Q (при определенных предположениях) представляются в виде

$$P(x,\ y)\equiv[f(x)+ay]\,\Phi(x,\ y),\qquad Q(x,\ y)\equiv[bx+\varphi(y)]\,F(x,\ y),$$
$$(a,\ b=\pm 1),$$

где Φ и F положительны, соответственно, вне кривых $y=af(x)$, $x=b\varphi(y)$; доказывается, например,

Теорема. Пусть дана система уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=[f(x)-y]\,\Phi(x,\ y),\\ \frac{dy}{dt}&=[x+\varphi(y)]\,F(x,\ y);\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

если

1) $xf(x) \leqslant 0$, $y\varphi(y) \leqslant 0$, причем в некоторой окрестности начала координат в первом соотношении для $x < 0$ и во втором соотношении выполняются строгие неравенства,

2) $|f(z)|$, $|\varphi(z)| \to \infty$ при $|z| \to \infty$,

3) $x \frac{F(x_1 - |y|)}{\Phi(x_1 - |y|)} \geqslant x \frac{F(x_1 |y|)}{\Phi(x_1 |y|)}$,

то особая точка $x = y = 0$ системы (2) асимптотически устойчива в целом.

Вопросы существования произвольного числа предельных циклов системы (1) в общем случае рассматриваются впервые. Устанавливаются достаточные условия существования нескольких предельных циклов в зависимости от формы изоклин $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$ в исследуемой области.

Далее, дается приложение к теории нелинейных колебаний: устанавливаются условия существования нескольких предельных циклов уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0; \tag{3}$$

указываются границы областей, где содержатся предельные циклы уравнения (3).

Н. Н. Мейман (*Москва*). **Некоторые применения метода конечных разностей к дифференциальным уравнениям.** Изучаются следующие вопросы:

1. Аппроксимация дифференциального оператора разностным. Устойчивость разностного оператора.

2. Согласование определений аппроксимации и устойчивости. Аппроксимация решения задачи Коши и смешанной задачи для уравнения в частных производных и единственность решения.

3. Доказательство существования и единственности решения задачи Коши для линейного и квазилинейного параболического уравнения. Задача Коши и смешанная задача для некоторых линейных и квазилинейных гиперболических уравнений.

4. Приложения к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Н. Н. Молчанов (*Москва*). **Применение теории непрерывных групп преобразований к исследованию решений обыкновенных дифференциальных уравнений.** Рассматривается уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y}{X},$$

где Y и X — многочлены от x, y, причем область, в которой рассматривается это уравнение, представляет собой круг S достаточно малого радиуса с центром в произвольной особой точке уравнения.

Доказывается, что возможны случаи:

а) уравнение имеет в области S аналитический интеграл $\theta(x, y) = C$ (т. е. $\theta(x, y)$ — степенной ряд по x, y, сходящийся в области S);

б) уравнение имеет решение $\theta_1(x, y) + C\theta_2(x, y) = 0$, где $\theta_1(x, y)$ и $\theta_2(x, y)$ — аналитические функции в области S;

в) уравнение имеет интегрирующий множитель вида $\frac{\psi_1(x, y)}{\psi_2(x, y)}$, где ψ_1 и ψ_2 — аналитические функции;

г) уравнение имеет интегрирующий множитель вида $e^{\frac{\psi_1}{\psi_2}}$, где ψ_1 и ψ_2 — аналитические функции в области S.

Показано, как конечным числом вычислений можно установить, какой из этих случаев имеет место.

Строятся компоненты бесконечно малого преобразования группы уравнения.

Указанные результаты применяются к изучению структуры интегральных кривых в области S (проблема различения) и обобщаются на случаи:

1) когда переменные x, y комплексны;

2) когда уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

где P и Q — аналитические в области S функции;

3) для случая, когда рассматривается система

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\ldots=\frac{dx_n}{x_n};$$

где x_k — многочлены от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Уравнение рассматривается, далее, в односвязной области S, границей которой служит любая замкнутая выпуклая кривая. Для этого случая доказывается существование интегрирующего множителя $\frac{1}{M(x, y)}$, где $M(x, y)$ — функция, однозначная во всей области S и аналитическая во всей этой области, кроме, быть может, множества нулевой меры. Строится группа преобразований ξ и η для рассматриваемого уравнения.

Полученные результаты применяются к исследованию структуры семейства интегральных кривых уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$ в области S.

А. Д. Мышкис (*Минск*), **В. Э. Аболиня** (*Рига*), **В. Ф. Жданович** (*Минск*), **Е. Х. Костюкович** (*Минск*), **А. Е. Лепин** (*Минск*), **П. И. Харитоненко** (*Минск*) и **А. С. Шлопак** (*Москва*). **Смешанная задача для линейных гиперболических систем на плоскости.** Основным примером здесь служит система телеграфных уравнений

$$L\frac{\partial i}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+R_i=h_1, \qquad C\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial i}{\partial x}+Gu=h_2 \tag{1}$$

(L, R, C и G — квадратные матрицы порядка $m \geqslant 1$; i, u, h_1 и h_2 — векторы). При исследовании этих систем большую роль играет рассмотрение интеграла энергии. Этот метод переносится на системы

$$\begin{aligned} &A_1\frac{\partial i}{\partial t}+B_1\frac{\partial i}{\partial x}+C_1\frac{\partial u}{\partial x}+D_1 i+F_1 u=h_1,\\ &A_2\frac{\partial u}{\partial t}+B_2\frac{\partial u}{\partial x}+C_2\frac{\partial i}{\partial x}+D_1 u+F_2 i+h_2, \end{aligned} \tag{2}$$

если $A_i^*=A_i$, $B_i^*=B_i$ $(i=1, 2)$, $C_1^*=C_2$ (звездочкой обозначена транспонированная матрица) и матрицы A_i положительно определены (что обеспечивает гиперболичность системы (2)) при краевом условии

$$\left.\left[(C-L_1)u+M_1 i+N_1\frac{\partial i}{\partial t}+P_1\int_0^t i\,dt\right]\right|_{x=0}=0,$$

$$L_1^* i|_{x=0}=0, \qquad \left.\left[(C-L_2)u-M_2 i-N_2\frac{\partial i}{\partial t}-P_2\int_0^t i\,dt\right]\right|_{x=l}=0,$$

$$L_2^* i|_{x=0}=0, \quad \left(N_i^*=N_i, \quad P_i^*=P_i; \quad i=1, 2\right),$$

$$i|_{t=0}=\varphi(x), \quad u|_{t=0}=\psi(x) \quad (0\leqslant x\leqslant l);$$

коэффициенты, входящие в это условие, также должны удовлетворять некоторым условиям определенности. Применение интеграла энергии дает возможность при соответствующих предположениях получить теоремы о непрерывной (в смысле L^2 и C) зависимости решения от начальных функций, правых частей и коэффициентов системы.

Отсюда при помощи гармонического анализа можно сразу получить теоремы о существовании обобщенного решения системы (1) и выяснить условия его регулярности (непрерывности, гладкости), если коэффициенты постоянны, матрицы L и C положительно определены, а граничное условие имеет вид

$$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0.$$

Эти результаты переносятся на случай, когда к левым частям системы добавляются (вообще говоря, нелинейные) операторы типа Вольтерра, учитывающие последействие, удовлетворяющие определенным условиям ограниченности; для системы (1) операторы должны быть линейными и допускать применение гармонического анализа.

Для доказательства существования решения в более общем случае можно применить метод последовательных приближений. При помощи этого метода система

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}-\lambda_i(x,\ t)\frac{\partial u_i}{\partial x}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x,\ t)\,u_j+f_i(x,\ t)\qquad(i=1,\ \ldots,\ n),$$

где $\lambda_1<\ldots<\lambda_k<0<\lambda_{k+1}<\lambda_n$ $(0\leqslant k\leqslant n)$, при краевом условии

$$u_i(0,\ t)=\sum_{j=k+1}^{n}\alpha_{ij}(t)\,u_j(0,\ t)+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\beta_{ij}(\tau;\ t)\,u_j(0,\ \tau)\,d\tau+h_i(t)\qquad(i=1,\ \ldots,\ k),$$

$$u_i(l,\ t)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}(t)\,u_j(l,\ t)+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\beta_{ij}(\tau;\ t)\,u_j(l,\ \tau)\,d\tau+h_i(t)\qquad(i=k+1,\ \ldots,\ n),$$

$$u_i(x,\ 0)=g_i(x)\qquad(i=1,\ \ldots,\ n)$$

приводится к системе интегральных уравнений типа Вольтерра для значений искомых функций на характеристиках, проходящих через точки $(0,\ 0)$ и $(l,\ 0)$; отсюда при выполнении определенных условий гладкости и согласования можно доказать существование классического решения краевой задачи. Выражение решения через резольвенту дает возможность получить оценки, из которых следуют условия существования обобщенного решения при сходимости в классе суммируемых функций. Введение соответствующего функционального пространства дает возможность требовать удовлетворения граничного (неоднородного) условия почти всюду, без перехода к соответствующему однородному условию и потому без требования условий согласования. Выясняются условия регулярности решения.

К этой краевой задаче был применен и метод сеток, причем сходимость рассматривалась в смысле C. Необходимые равномерные оценки сеточных приближений и их первых и вторых разностей получаются с помощью исследования рекуррентной системы неравенств. Окончательные результаты сходны с указанными в предыдущем абзаце.

Метод разделения переменных был применен к несамосопряженной краевой задаче

$$\frac{\partial u}{\partial x}+A(x)\frac{\partial u}{\partial t}+B(x)\,u=0,$$

$$\left(M_0\frac{\partial u}{\partial t}+N_0u\right)\Big|_{x=0}+\left(M_1\frac{\partial u}{\partial t}+N_1u\right)\Big|_{x=l}=0,\qquad u|_{t=0}=\varphi(x);$$

если система гиперболична в узком смысле, матрица $\|M_0,\ N_0,\ M_1,\ N_1\|$ имеет максимальный ранг, а граничные условия не образуют интегрируемых комбинаций и удовлетворяют некоторым условиям невырожденности, обобщающим условия регулярности по Биркгофу. Разделение переменных по формулам $u=e^{\lambda t}X(x)$ (для простых корней), $u=P(t)e^{\lambda t}X(x)$ (для кратных корней) приводит к краевой задаче с параметром как в уравнениях, так и в краевом условии. Выясняются асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций, а также условия разложимости по собственным функциям. Для некоторых классов случаев указывается функциональное уравнение, удовлетворение которого необходимо и достаточно для разложимости; в иных случаях разложение возможно без таких ограничений. Полученные оценки дают возможность перейти к обобщенному решению и указать условия его регулярности. Интеграл энергии заменяется билинейной интегральной формой, связывающей решения сопряженных задач. Она дает, в частности, возможность ввести в систему собственных функций соотношения биортогональности (при соответственно выбранном скалярном произведении), на основе которых можно находить коэффициенты разложений.

Исследована смешанная задача для уравнений, близких к гиперболическим; здесь простейшим является уравнение колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2},$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0, \qquad u|_{t=0}=\varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x).$$

На основе применения интеграла энергии и метода разделения переменных (хотя совокупность собственных частот здесь ограничена) получаются теоремы о существовании, единственности и свойствах решения, в частности, о его поведении при $\alpha\to+0$.

Рассмотрен также метод прямых. В применении к задаче Дирихле для уравнения Лапласа в области с границей общего вида (не обязательно прямоугольной) показаны трудности в этом методе (решение соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений может не существовать) и указано видоизменение метода, обеспечивающее сходимость приближений к решению. Исследуется также применение метода прямых к параболическим и гиперболическим уравнениям; полученные оценки дают возможность доказать сходимость метода.

Ю. И. Неймарк (*Горький*). **О связи устойчивостей разомкнутой и замкнутой динамических систем.** 1. Вводится понятие динамического оператора; для него определяются понятия устойчивости, области притяжения и абсолютной устойчивости. Затем доказывается ряд теорем, устанавливающих, при каких условиях из устойчивости так называемой разомкнутой динамической системы, описываемой оператором L, следует устойчивость замкнутой, описываемой оператором $(L^{-1}-M)^{-1}$. Доказательства основываются на использовании теорем о существовании неподвижной точки, методе сжатых отображений и использовании непрерывной зависимости нормы динамического оператора от времени.

2. Полученные общие утверждения применяются к вопросам устойчивости состояния равновесия и периодических движений динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, дифференциально-разностными уравнениями и уравнениями в частных производных. Для обыкновенных дифференциальных уравнений повторяются результаты Ляпунова с дополнительной возможностью оценить размеры областей притяжения, для дифференциально-разностных усиливаются утверждения Райта и Белмана и, наконец, для периодических движений дифференциально-разностных уравнений и для уравнений в частных производных получаются новые результаты.

М. Н. Олевский (*Москва*). **К задаче Коши для обобщенного уравнения Эйлера—Пуассона—Дарбу.** Назовем обобщенным уравнением Эйлера—Пуассона—Дарбу уравнение

$$A_p u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a\alpha cth\alpha t\frac{\partial u}{\partial t}+bu, \tag{1}$$

где A_p — линейный дифференциально-разностный оператор

$$\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_m=0\\ l_1+\ldots+l_m\leqslant l}}^{l}\ \sum_{q_1,\ldots,q_m=0}^{q} A^{l_1,\ldots,l_m}_{q_1,\ldots,q_m}(x_1,\ldots,x_m)\frac{\partial^{l_1+\ldots+l_m}W}{\partial x_1^{l_1}\ldots\partial x_m^{l_m}},$$

$$W \equiv u\left(x_1 + \alpha_{q_1}^{l_1, \ldots, l_m}, \quad x_2 + \beta_{q_2}^{l_1, \ldots, l_m}, \ldots, x_m + \mu_{q_m}^{l_1, \ldots, l_m};\ t\right)$$

(a, α, b и все α, $\beta, \ldots$, μ со значками — постоянные).

Пусть

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_m;\ t;\ a,\ b;\ f) \equiv u(P;\ t;\ a,\ b;\ f)$$

есть решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(P;\ t;\ a,\ b;\ f)|_{t=t_0} = f(P), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0} = 0 \quad (t_0 \geqslant 0). \tag{2}$$

Для $A_p \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$, $\alpha = +0$, $b = 0$ и при различных частных значениях m и a уравнение (1) встречалось в классических исследованиях Эйлера, Пуассона и Дарбу. Сингулярная задача Коши (1—2) при $A_p \equiv \Delta$, $\alpha = +0$ была предметом недавних рассмотрений Асгейрсона ($a = m - 1$), Капилевича ($m = 2, 3$; $0 < a < 1$; b — произвольное), Вайнштейна, Дайаза, Блюма (a — произвольное, $b = 0$) и автора (для $A_p \equiv \Delta_2$, где Δ_2 — оператор Бельтрами в S_m-пространстве постоянной кривизны m измерений, и при произвольных значениях a, α и b).

В докладе сообщаются результаты автора, относящиеся к следующим вопросам:

а) достаточные условия существования и единственности регулярной ($t_0 > 0$) и сингулярной ($t_0 = 0$) задачи Коши (1), (2);

б) связь между решениями задачи Коши (1—2) для различных пар значений параметров a и b;

в) решение регулярной и сингулярной задачи Коши (1), (2) при $A_p \equiv \Delta_2$ в S_m;

г) рекуррентные формулы для решений уравнения (1) и обобщенные теоремы Фридрихса [1].

Лит.: 1. Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 2, 1945, стр. 471.

Б. Н. Панайоти (*Баку*). **Задача Коши для уравнений в частных производных с малыми параметрами.** Пусть $u_i(t, x, \mu)$ $(i = 1, 2)$ есть решение системы

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \sum_{j=1}^{2} \sum_{(k_s)}^{k} A_{1j}^{(k_s)}(t) \frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_1(t, x),$$

$$\mu \frac{\partial u_2}{\partial t} = A(t) u_2 + \sum_{(k_s)}^{k} A_{21}^{(k_s)}(t) \frac{\partial^k u_1}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_2(t, x),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u_i|_{t=t_0} = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Пусть $\overline{u}_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$ — решение вырожденной задачи

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \sum_{j=1}^{2} \sum_{(k_s)}^{k} A_{1j}^{(k_s)}(t) \frac{\partial^k \overline{u}_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_1(t, x),$$

$$0 = A(t) \overline{u}_2 + \sum_{(k_s)} A_{21}^{(k_s)}(t) \frac{\partial^k \overline{u}_1}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_2(t, x),$$

$$\overline{u}_1|_{t=t_0} = \varphi_1(x).$$

Выясняются условия, обеспечивающие предельное равенство

$$\lim_{\mu \to +0} u_i(t, x, \mu) = \overline{u}_i(t, x) \quad (i = 1, 2).$$

Исследование проводится с помощью интеграла Фурье, что позволяет свести изучаемый вопрос к аналогичному вопросу для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Р. В. Петропавловская (*Ленинград*). **О колебательности дифференциального уравнения $u''=f(u, u', t)$.** 1. Предполагается, что функции $f(u, u', t)$, $g(u, u', t)$, $\psi(u, u', t)$, $\varphi(u, t)$ принимают вещественные значения и непрерывны при $-\infty < u < \infty$, $-\infty < u' < \infty$, $a < t < \infty$ $(a \geqslant -\infty)$.

2. Теорема 1. Пусть функции f, g удовлетворяют неравенству

$$\frac{f(u, u', t)}{u} < \frac{g(v, v', t)}{v}$$

при $a < t < \infty$, $0 < |u| \leqslant |v|$, $\frac{u}{v} > 0$, $|u'| \leqslant |v'|$. Пусть $u(t)$, $v(t)$ — решения уравнений

$$u''=f(u, u', t), \tag{1}$$

$$v''=g(v, v', t), \tag{2}$$

соответственно, существующие при $T_1 < t < T_2$, причем на этом промежутке $u(t) \neq 0$, и пусть существует такое t_0, $T_1 < t_0 < T_2$, что $u(t_0)=v(t_0)$, $u'(t_0)=v'(t_0)$.

Тогда $|u(t)| < |v(t)|$ при $T_1 < t < T_2$, $t \neq t_0$.

Используя теорему 1, можно получить некоторые утверждения об интервале существования и нулях решений уравнения (1).

3. Уравнение (1) будем называть *колебательным*, если все его решения имеют бесконечное число нулей.

Теорема 2. Пусть $\varphi(u, t) > 0$, если $u \neq 0$, $\varphi(u_2 t) \geqslant \varphi(u_1, t)$, если $|u_2| \geqslant |u_1|$, и пусть выполнено по крайней мере одно из следующих двух условий:

1) для всякого u_0 уравнение $u''+u\varphi(u_0, t)=0$ колебательное,

2) для всякого u_0

$$\int\limits_{a+1}^{\infty} dz \int\limits_{z}^{\infty} \varphi(u_0, t)\, dt = \infty$$

и существует такое $C \neq 0$, что уравнение $u''+u\varphi(C, t)=0$ колебательное.

Тогда уравнение

$$u''+u\varphi(u, t)=0$$

колебательное.

Теорема 3. Пусть функция φ удовлетворяет условиям теоремы 2 и пусть $\psi(u, u', t) > 0$ при $u \neq 0$ и для всякого $r > 0$

$$\sup_{\sqrt{u^2+t^2} < r} \psi(u, u', t) < \infty.$$

Тогда уравнение

$$u''+u[\varphi(u, u', t)+\psi(u, u', t)]=0$$

колебательное.

С. П. Пулькин (*Куйбышев*). **Сингулярная задача Трикоми.** Для уравнения

$$u_{xx}+\operatorname{sgn} y \cdot u_{yy}+\frac{p}{x} u_x=0 \tag{1}$$

поставим следующую задачу. Рассмотрим гладкую кривую Γ, лежащую в полуплоскости $y > 0$, пересекающую ось OY в одной точке и опирающуюся на отрезок $-1 \leqslant x \leqslant 1$ оси OX. Пусть область D ограничена кривой Γ и отрезками характеристик в полуплоскости $y > 0$:

$$L_1\left(x+y=0,\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right),\quad L_2\left(x-y=1,\quad \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right),$$

$$L_3\left(x-y=0,\quad -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0\right),\quad L_4\left(x+y=-1,\quad -1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right).$$

Часть области D, для которой $x>0$ $(x<0)$, обозначим через D^+ (D^-); часть кривой Γ, для которой $x>0$ $(x<0)$, — через Γ^+ (Γ^-).

Сингулярная задача T: найти в D^++D^- решение уравнения (1), ограниченное в D^++D^-, непрерывное в $D^++D^-+\Gamma+\sum\limits_1^4 L_k$, имеющее непрерывные частные производные первого порядка в D^++D^-, принимающее заданные значения на Γ и заданные значения на L_1+L_3 (или на L_2+L_4).

При $p\geqslant 1$ задача распадается на две самостоятельные задачи для каждой из двух областей D^+ и D^-. Поэтому достаточно рассмотреть следующую задачу для области D^+.

Сингулярная задача T^+: в области D^+ найти решение $u(x, y)$ уравнения (1), непрерывное в $D^++\Gamma^++L_1+L_2$, имеющее непрерывные производные первого порядка в D^+, удовлетворяющие краевым условиям:

$$u|_{\Gamma^+}=\varphi(s),$$

$$u|_{L_1}=\psi(x)\quad(\text{или } u|_{L_2}=\psi(x),\quad \psi(1)=\varphi(0)),$$

где $\varphi(s)$, $\psi(x)$ — заданные функции.

Доказывается существование и единственность решения задачи T^+ при любых непрерывных $\varphi(s)$ и $\psi(x)$.

Решение сингулярной задачи T может быть применено для решения пространственной задачи Трикоми в следующей постановке.

Дано уравнение

$$u_{xx}+u_{yy}+\operatorname{sgn} z\cdot u_{zz}=0 \tag{2}$$

и область D, ограниченная поверхностью Σ, находящейся в полупространстве $z>0$ и опирающейся на окружность $x^2+y^2=1$ в плоскости XOY, и конусами $(z\leqslant 0)$: $x^2+y^2=(z+1)^2$ (K_1), $x^2+y^2=z^2$ (K_0). Требуется найти решение уравнения (2) по заданным значениям на Σ и на части конуса K_0 (или K_1), принадлежащей границе области.

Если Σ — поверхность вращения, то решение можно искать в виде ряда

$$u(r,\varphi,z)=\sum_{m=0}^{\infty} r^m\left[P_m(r,z)\cos m\varphi+Q_m(r,z)\sin m\varphi\right], \tag{3}$$

где функции P_m, Q_m служат решениями сингулярной задачи T для уравнений

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\operatorname{sgn} z\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{2m+1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=0\quad(m=0,1,2,\ldots)$$

при надлежащим образом подобранных краевых данных. При некоторых ограничениях, налагаемых на поверхность Σ и на краевые данные пространственной задачи, доказана сходимость ряда (3).

И. С. Саргсян (*Ереван*). **О дифференцировании разложений по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля.** Изучаются асимптотическое поведение производных спектральной функции и вопросы суммирования производных разложений по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''+\{\lambda-q(x)\}y=0, \tag{1}$$

определенного на полупрямой $(0,\infty)$, с начальными условиями

$$y(0)=1,\quad y'(0)=0. \tag{2}$$

Асимптотическое поведение самой спектральной функции и вопросы разложения для задачи (1), (2) изучены Б. М. Левитаном.

Пусть $\theta(x, s; \mu)$, $(\lambda=\mu^2, \lambda>0)$ — спектральная функция задачи (1), (2), а $\theta^*(x, s; \mu)$ — спектральная функция задачи (1), (2) при $q(x)\equiv 0$.

Приведем основные результаты, полученные при помощи метода Б. М. Левитана.

Теорема 1. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую $(k-1)$-ю $(k=1, 2, 3, \ldots)$ производную, то при $\mu\to\infty$ справедлива асимптотическая оценка

$$\left|\int_0^{\mu}\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^k d_\nu\left\{\frac{\partial^k\theta(x, s; \nu)}{\partial x^n\partial s^m}-\frac{\partial^k\theta^*(x, s; \nu)}{\partial x^n\partial x^m}\right\}\right|<C \quad (n+m=k),$$

где постоянная C зависит от x и s и не зависит от μ.

Пусть $f(x)\in L_2(0, \infty)$. Положим

$$S(x, \mu)=\int_0^\infty f(s)\,\theta(x, s; \mu)\,ds, \qquad S^*(x, \mu)=\int_0^\infty f(s)\,\theta^*(x, s; \nu)\,ds.$$

Теорема 2. Если функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую k-ю $(k=1, 2, 3, \ldots)$ производную, то равномерно в каждом конечном интервале имеет место равенство

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^\infty\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)^k d_\nu\left\{\frac{\partial^k S(x, \nu)}{\partial x^k}-\frac{\partial^k S^*(x, \nu)}{\partial x^k}\right\}=0,$$

т. е. разность между средними по Риссу k-го порядка производных k-го порядка разложения функции $f(x)\in L_2(0, \infty)$ по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля и разложения в обычный интеграл Фурье по косинусам стремится к нулю равномерно в каждом конечном интервале.

Теорема 3. Пусть выполнены следующие условия:

1) функция $q(x)$ в каждом конечном интервале имеет суммируемую k-ю $(k=1, 2, 3, \ldots)$ производную;

2) в некоторой окрестности точки x_0 производная $f^k(x)$ существует и суммируема;

3) в точке x_0 производная $f^k(x)$ непрерывна.

Тогда производная k-го порядка разложения по собственным функциям оператора Штурма—Лиувилля функции $f(x)\in L_2(0, \infty)$ суммируема в точке $x=x_0$ по методу Рисса k-го порядка к значению $f^k(x_0)$.

Б. Н. Скачков (*Ленинград*). **Об устойчивости в целом одного класса нелинейных систем автоматического регулирования.** Рассматривается система дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}\dot\eta_1&=r_1\eta_1+n_1\xi,\\ \dot\eta_2&=r_2\eta_2+n_2\xi, \qquad\qquad (1)\\ \dot\xi&=f(\sigma), \qquad \sigma=p_1\eta_1+p_2\eta_2-\xi,\end{aligned}$$

где r_i, n_i, p_i $(i=1, 2)$ — вещественные постоянные, $r_1<0$, $r_2<0$, а $f(\sigma)$ — однозначная ограниченная функция, заданная при всех вещественных σ и обладающая свойствами

$$f(\sigma)=0 \text{ при } \sigma=0,$$

$$\sigma f(\sigma)>0 \text{ при } |\sigma|>0$$

и каким-либо свойством, обеспечивающим единственность тривиального решения.

А. И. Лурье [1] доказал, что если параметры n_i, p_i $(i=1, 2)$ удовлетворяют некоторым весьма общим условиям, то для системы (1) существует определенно положительная функция v, имеющая в наших обозначениях вид

$$v=\int_0^\sigma f(\sigma)\,d\sigma+B_1\dot\eta_1^2+B_2\dot\eta_1\dot\eta_2+B_3\dot\eta_2^2 \tag{2}$$

(где $B_1\dot\eta_1^2+B_2\dot\eta_1\dot\eta_2+B_3\dot\eta_2^2$ — определенно-положительная квадратичная форма аргументов $\dot\eta_1\dot\eta_2$), производная от которой v, взятая в силу системы (1), определенно отрицательная.

Как показал Н. П. Еругин [2], существование подобной функции в случае, когда

$$\int_0^\infty f(\sigma)\,d\sigma \tag{3}$$

сходится, само по себе недостаточно для заключения об устойчивости в целом.

Применив качественное исследование, мы доказываем, что если функция $f(\sigma)$ непрерывная и такая, что система (1) удовлетворяет условию единственности решения при любых η_1, η_2, ξ, то при выполнении условий А. И. Лурье система (1) устойчива в целом независимо от характера интеграла (3). При доказательстве мы используем функцию (2) и теорему В. А. Плисса [3].

При помощи других качественных методов мы доказываем устойчивость системы (1) в целом, не пользуясь функцией (2) при более узком, чем у Лурье, условии

$$1+\frac{|n_1P_1|}{}+\frac{|n_2P_2|}{r}>0,$$

предполагая единственность решения лишь в точке равновесия и не требуя непрерывности $f(\sigma)$, а также оцениваем абсолютные величины переменных η_1, η_2, ξ через их начальные значения.

Лит.: 1. Лурье А. И., Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования, ГИТТЛ, М.—Л., 1951. 2. Еругин Н. П., Прикл. матем. и мех., 16, № 5, (1952), 620—628. 3. Плисс В. А., ДАН СССР **103**, № 1, (1955).

В. Я. Скоробогатько (*Львов*). **Некоторые теоремы качественной теории уравнений в частных производных второго порядка.** Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+c(x_1, x_2)\,u=0, \qquad c\geqslant 0. \tag{1}$$

Решения уравнения (1) считаются действительными дважды непрерывно дифференцируемыми функциями в тех областях, где они определены. $c(x_1, x_2)$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Теорема 1. Пусть решение u уравнения (1) определено в некоторой области D с замкнутой кусочно-гладкой границей Γ, причем $u>0$ в D и $u=0$ на Γ_1.

Тогда внутренний диаметр d области D (т. е. верхняя грань диаметров кругов, содержащихся в D) имеет оценки:

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}}\leqslant d\leqslant\frac{2M_0}{\sqrt{m}},$$

где $M=\max\limits_D c$, $m=\min\limits_D c$, M_0 — первый нуль функции Бесселя нулевого порядка

Теорема 1 аналогична теореме для уравнения $y''+c(x)\,y=0$, $c(x)\geqslant 0$, которая устанавливает оценку расстояния d_1 между двумя последовательными нулями решения этого уравнения:

$$\frac{\pi}{\sqrt{\max c_0}}\leqslant d_1\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{\min c_0}}\,.$$

Теорема 2. Пусть в некоторой конечной области D заданы дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+c_1 u=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}+c_2 z=0, \tag{3}$$

причем $c_1>c_2$. Пусть на границе Γ области D некоторое решение u уравнения (2) равно нулю и внутри этой области $u\geqslant 0$ и $u\not\equiv 0$. Предполагается также, что множество точек границы Γ, до которых нельзя дотронуться кругом изнутри области D, имеет линейную меру нуль.

Тогда для любого решения z уравнения (3) найдется такая точка области D, в которой это решение обращается в нуль.

Следствие. Решение z обращается в нуль на некоторых кривых, расположенных в D.

Теорема 3. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+cu=0, \qquad c>0 \tag{4}$$

в некоторой области D с границей Γ, причем некоторое решение u этого уравнения равно нулю на Γ и положительно в D. Требование гладкости границы Γ такое же, как и в предыдущей теореме.

Тогда любое функционально независимое с u решение z того же уравнения (4) принимает в области D нулевое значение.

Следствие. Решение z обращается в нуль по некоторым кривым, расположенным в области D.

Теорема 3 обобщает теорему о разделении нулей линейно независимых решений обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Теорема 4. Пусть в некоторой области D задано уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+c(x_1,\ x_2,\ \lambda)\,u=0,$$

где λ — параметр.

Пусть $c(x_1, x_2, \lambda)\to\infty$ при $\lambda\to\infty$ для всех точек $(x_1, x_2)\in D$. Тогда, на какое бы число ν областей D_i ни была разбита область D, найдется такое значение λ_ν, что при всех $\lambda\geqslant\lambda_\nu$ линии $u=0$ для любого решения u нашего уравнения проходят через каждую область D_ν.

Большинство из полученных результатов легко обобщается на случай общего уравнения эллиптического типа второго порядка.

М. М. Смирнов (*Ленинград*). **Об одной краевой задаче для уравнений смешанного типа.** Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\operatorname{sgn} y\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0 \tag{1}$$

в односвязной области D, ограниченной расположенной в верхней полуплоскости $y>0$ гладкой линией σ с концами в точках $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 0)$ и двумя характеристиками $AC:\ y=-x$ и $BC:\ y=x-1$ уравнения (1).

Требуется определить функцию $u(x,\ y)$ со следующими свойствами:

1) $u(x,\ y)$ является решением уравнения (1) внутри области D при $y\neq 0$;

2) функция $u(x,\ y)$ и ее первые производные непрерывны в замкнутой области D;

3) частные производные второго порядка непрерывны внутри области D, причем вблизи точек A и B они могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы;

4) частные производные третьего порядка непрерывны внутри области D, причем вблизи точек A и B они могут обращаться в бесконечность порядка ниже двух;

5) на линии σ и на характеристиках AC и BC функция u принимает заданные значения

$$u\mid_\sigma = \varphi_1(s), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\sigma = \varphi_2(s), \quad 0 \leq s \leq l, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=-x} = \psi_3(x) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=x-1} = \psi_4(x) \quad \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 1\right), \tag{3}$$

где n — внутренняя нормаль.

Для сформулированной задачи доказывается в определенных предположениях существование и единственность решения.

С. А. Стебаков (*Москва*). **Симплициально-линейные дифференциальные уравнения.** Произведем какое-нибудь симплициальное разбиение данной конечной области эвклидова пространства $(x_i, \ldots, x_n)$. Назовем функцию $f(x_i, \ldots, x_n)$ симплициально-линейной ((СЛ)-функцией), если она линейна на каждом симплексе выбранного разбиения.

Назовем систему уравнений вида $\dot{x}_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$; $i=1, \ldots, n$ симплициально-линейной, если все правые части этой системы являются (СЛ)-функциями для одного и того же симплициального разбиения области определения функции fi.

Выделение класса (СЛ)-систем до сих пор не производилось, в то время как он имеет большое значение для синтеза динамических систем.

В докладе предлагается некоторый канонический вид симплициального разбиения и для него указывается алгоритм эффективного образования всякой заданной на множестве вершин (СЛ)-функции посредством операций суммирования и вычисления некоторых кусочно-линейных функций одного переменного.

Далее, для динамических систем, фазовые пространства которых удовлетворяют определенным условиям (выполняющимся для всякой реальной физической системы), дается некоторое аппроксимативное определение понятия «поведения» системы, позволяющее говорить о приближенном задании поведения («ε-поведение»).

Указывается способ составления (СЛ)-уравнений системы, имеющей наперед заданное ε-поведение (эта задача находит применение при решении задач синтеза).

Применяя этот способ и сличая данные уравнения системы с уравнениями, соответствующими желательному ε-поведению, мы получаем возможность управлять физическим явлением в некоторых случаях, когда интегрирование данных дифференциальных уравнений не дает этой возможности. По мнению докладчика, это должно быть учтено при постановке проблем в теории дифференциальных уравнений.

Ю. И. Черский (*Ростов на Дону*). **Интегральные уравнения типа свертки.** Рассматриваются уравнения типа свертки

$$\varphi(x) + \int_0^\infty K_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt + \int_{-\infty}^0 K_2(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x>0, \\ \varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x<0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

при различных предположениях относительно поведения ядер K_1 и K_2 на бесконечности (рост или убывание показательного порядка). Уравнение (1) при $K_2 \equiv 0$ изучалось Е. Хопфом и Н. Винером, В. А. Фоком, И. М. Рапопортом и др. «Парное» уравнение (2) при $K_j \in L$, $\varphi \in L_2$ исследовано И. М. Рапопортом.

Трудность вопроса заключается в наличии функций с различными показательными порядками роста на бесконечности, ввиду чего обычный путь преобразования уравнений по Фурье оказывается непригодным. Указывается общий метод преобразования по Фурье уравнений типа свертки. В результате такого преобразования возникает краевое условие задачи теории аналитических функций, определенное на одной прямой или на нескольких параллельных прямых.

Благодаря этому методу удается преобразовать уравнения (1) и (2) во всех 32 случаях, которые здесь могут представиться. В результате получаются разнообразные краевые задачи: задачи Римана с краевыми условиями на одной прямой или на паре прямых; задача Римана для двух кусочно-голоморфных функций; более сложные задачи, в общем виде еще не изученные и решенные в работе при предположении об аналитической продолжимости преобразований Фурье ядер на некоторые области.

Рассматривается более общее уравнение, получающееся из уравнения (1) прибавлением вполне непрерывного оператора. В двух случаях (в пространстве L_2 и в пространстве решений с показательным порядком роста на бесконечности) при помощи преобразования Фурье это уравнение сводится к сингулярному уравнению с ядром Коши, теория которого известна.

М. К. Фаге (*Черновцы*). **Решение одной задачи Коши путем увеличения числа независимых переменных.** Рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными

$$-\frac{\partial^n F(wx)}{\partial w^n} + \frac{\partial^n F}{\partial x^n} + \sum_{0 \leqslant i+j < n} p_{ij}(w, x) \frac{\partial^{i+j} F}{\partial w^i \partial x^j} = H(w, x), \tag{1}$$

где $p_{ij}(w, x)$, $H(w, x)$ непрерывны по совокупности переменных — комплексной $w = u + iv$, изменяющейся в некоторой области G, и вещественной x, изменяющейся в интервале $\Delta\,(0 \leqslant x < l)$, $l \leqslant +\infty$, и регулярны по w при фиксированном x.

Для формулирования результатов используется комплексно-вещественное (геометрически трехмерное) пространство K с горизонтальной координатной плоскостью w и вертикальной вещественной осью x, с одинаковыми масштабами по всем осям u, v, x. Область задания уравнения (1) есть цилиндр $C = G \times \Delta$.

Пусть $P_0(w_0, x_0) \in K$, $x_0 > 0$; построим замкнутую правильную n-гранную пирамиду V_{P_0}, вершина которой находится в P_0, боковые ребра наклонены к плоскости w под углом 45°, а основанием является правильный n-угольник W_{P_0} в плоскости w с центром w_0 и вершинами $w_0 + x_0\varepsilon_k$ $(k = 1, \ldots, n)$, где $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — все корни n-й степени из 1.

Обозначим через C_0 множество тех точек P_0, для которых $V_{P_0} \subset C$. Следующие теоремы говорят о решении задачи Коши для уравнения (1).

Теорема А. Пусть даны n функций $f_0(w), \ldots, f_{n-1}(w)$, регулярных в области G. Тогда существует, и притом единственная, функция $F(w, x)$, которая: 1) вместе со своими частными производными $\partial^k F/\partial x^k$ $(k = 1, \ldots, n)$ определена в $C_0 + G$, непрерывна по (w, x) и регулярна по w при фиксированном x; 2) удовлетворяет уравнению (1) в C_0 (а по непрерывности и в G); 3) вместе с $\partial^k F/\partial x^k$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ принимает на G заданные значения

$$F(w, 0) = f_0(w), \ldots, \left.\frac{\partial^{n-1} F(w, x)}{\partial x^{n-1}}\right|_{x=0} = f_{n-1}(w). \tag{2}$$

Теорема Б. Если, в дополнение к условиям теоремы А, частные производные $\partial^s p_{ij}(w, x)/\partial x^s$ $(s = 1, \ldots, j;\ i + j \leqslant n - 1)$ существуют и непрерывны по (w, x) в C_0, непрерывно продолжаемы на $C_0 + G$ и регулярны по w при фиксированном x, то значение $F(w, x)$ в точке $P_0(w_0, x_0) \in C_0$ выражается интегралами через значения функций (2) и их производных, взятые только на основании W_{P_0} пирамиды V_{P_0} (формула Римана).

Доказательство обеих теорем проводится введением n действительных («характеристических») переменных $t_1, \ldots, t_n$ по формулам

$$w = w_0 + \sum_1^n t_i \varepsilon_i, \quad x = x_0 - \sum_1^n t_i.$$

В качестве приложения выводятся интегральные формулы, выражающие фундаментальные решения уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx_{n-1}} + \cdots + p_0(x)\,y = \lambda y, \tag{3}$$

заданного на $0 \leqslant x < l$ с начальными значениями в точке $x = 0$, при условии, что коэффициент $p_k(x)$ непрерывно дифференцируем k раз ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) через фундаментальные решения простейшего уравнения

$$\frac{d^n y}{dw^n} = \lambda y$$

с начальными значениями в точке $w = 0$, т. е. получаются «операторы преобразования», построенные и изученные для уравнения (3) 2-го порядка Б. М. Левитаном, В. А. Марченко, А. Я. Повзнером и другими авторами.

Б. В. Хведелидзе (*Тбилиси*). **О сингулярных интегральных уравнениях с ядрами типа Коши в классе функций, суммируемых с весом.** Изучение сингулярного интегрального уравнения

$$a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + T\varphi = f(t), \tag{1}$$

(где $a(t)$, $b(t)$ — известные функции (или матрицы), имеющие конечное число точек разрыва на кривой Γ; $f(t)$ — известная, а $\varphi(t)$ — искомая функции (или соответственно векторы); $T(\varphi)$ — вполне непрерывный оператор) существенно зависит от тех классов функций, которые считаются допустимыми как для известных, так и для неизвестных элементов уравнения (1). До сих пор при разработке теории уравнения (1) (в частности, при доказательстве теорем Нетера) относительно a, b и f предполагалось, что они кусочно удовлетворяют условию Гельдера на Γ, а искомая функция (или вектор) принадлежит к классу H_* (определение этого класса см. в работе [1], стр. 236). Эти условия, налагаемые на заданные и искомые элементы уравнения (1), в ряде случаев сильно ограничивают поле применимости этого уравнения.

Доказывается, что, вводя некоторые классы суммируемых с весом функций и изучив сингулярный оператор Коши в этих классах, теорию уравнения (1) можно развить в случае, когда $a(t)$ и $b(t)$ кусочно-непрерывны, а f и φ принадлежат введенным классам суммируемых функций. Кроме того, строится регуляризатор уравнения (1) без использования решения граничной задачи теории аналитических функций (задачи Римана).

Указывается ряд приложений полученных результатов к граничным задачам теории дифференциальных уравнений эллиптического типа.

Лит.: 1. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М., 1946.

С. Д. Эйдельман (*Львов*). **О методе фундаментальных решений в теории параболических систем.** 1. Рассматриваются p-параболические в смысле Петровского системы, коэффициенты которых зависят от t. С помощью теорем двойственности Гельфанда и Шилова дается аналитическое описание матрицы Грина такой системы. Из этого описания следуют теоремы о разрешимости задачи Коши в классе быстро растущих функций, теоремы об аналитичности по пространственным координатам регулярных решений p-параболических систем, различные лиувиллевские теоремы.

2. Для параболической системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u \tag{1}$$

$\left(P\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\right.$ — матричный дифференциальный оператор порядка не выше $\left.2b\right)$ в предположении непрерывности и ограниченности производных определенного конечного порядка от коэффициентов в полосе $\Pi\{-\infty < x_s < \infty,\ s=1, \ldots, n;\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ строится фундаментальная матрица решений $Z(t, \tau, x, \xi)$.

С помощью этой матрицы устанавливается корректная разрешимость задачи Коши для линейной системы (1) и квазилинейной системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = P_0\left(t, x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u + F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial^{2b-1} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right) \tag{2}$$

в классе функций порядка роста $\frac{2b}{2b-1} - \varepsilon$ (в линейном случае $\varepsilon = 0$).

Изучена зависимость решения задачи Коши от коэффициентов оператора p и от нелинейных слагаемых.

3. Для конечных областей строится нормальная фундаментальная матрица решений $\omega(t, \tau, x, \xi)$ (представляющая собой фундаментальную матрицу системы (1) по аргументам t, x и фундаментальную матрицу системы, сопряженной к (1), по аргументам τ и ξ), устанавливается ее достаточная гладкость и даются следующие ее приложения:

а) посредством изучения матрицы $\omega(t, \tau, x, \xi)$ в комплексной области и использования для главной части этой матрицы теоремы Фрагмена и Линделёфа устанавливаются теоремы об аналитичности по пространственным координатам регулярных решений (без каких бы то ни было дополнительных предположений о гладкости или асимптотике) систем (1), (2) в предположении аналитичности коэффициентов и нелинейного члена по этим координатам $\Bigl($для системы (2) нужно также требовать аналитичность F по u, $\frac{\partial u}{\partial x_k}, \ldots, \frac{\partial^{2b-1} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\Bigr)$;

б) устанавливается теорема, переносящая гладкость с коэффициентов системы (1) на ее регулярные решения;

в) продолжается изучение обобщенных в смысле С. Л. Соболева решений. С помощью матрицы $\omega(t, \tau, x, \xi)$ устанавливается, что любое обобщенное в смысле С. Л. Соболева решение параболической системы (1) или произвольной линейной эллиптической системы с действительными достаточно гладкими коэффициентами является классическим решением;

г) устанавливается теорема о поведении решений уравнений параболического типа в окрестности изолированной особой точки в зависимости от их интегральной характеристики.

Результаты, освещенные в докладе, частично опубликованы в статьях: 1) ДАН СССР, т. 97, в. 6; 2) ДАН СССР, т. 99, в. 5; 3) ДАН СССР, т. 103, в. 1; 4) Матем. сборн., т. 38 (80), в. 1.

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

А. Е. Аветисян (*Ереван*). **Об аппроксимации функций многих переменных целыми функциями.** В работах М. М. Джрбашяна была построена теория прямых и обратных интегральных преобразований в классе L_2 на системе лучей в комплексной области с ядрами вида e^{-z^p} и $E_\rho(z;\ \mu)$, где $E_\rho(z;\ \mu)$ — целая функция, определяемая рядом Тейлора

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(\mu+n\rho^{-1})}\quad\left(\rho\geqslant\frac{1}{2},\ 0<\mu<\infty\right).$$

Им было доказано, что для произвольной конечной системы лучей $\{L\}$, исходящих из одной точки комплексной плоскости, можно построить целые функции нормального типа и определенного порядка, $\rho\geqslant\frac{1}{2}$, сходящиеся в среднем к заданной функции, принадлежащей к классу L_2, на $\{L\}$.

Настоящий доклад посвящается обобщению результатов М. М. Джрбашяна на функции многих переменных, причем только ради простоты записи изложение ведется для функций двух переменных.

В работе доказаны теоремы о прямых и обратных преобразованиях в классе $L_2(0,\ \infty;\ 0,\ \infty)$ с ядрами

$$\frac{e^{\pm ix_1y_1}-1}{\pm iy_1}\cdot\frac{e^{\pm ix_2y_2}-1}{\pm iy_2}$$

и

$$y_1^{\mu_1}\ y_2^{\mu_2}\ E_{\rho_1\rho_2}\left(x_1^{\frac{1}{\rho_1}}\ y_1^{\frac{1}{\rho_1}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho_1}},\ x_2^{\frac{1}{\rho_2}}\ y_2^{\frac{1}{\rho_2}}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho_2}};\ \mu_1+1,\ \mu_2+1\right)x_1^{\mu_1-1}\ x_2^{\mu_2-1},$$

где

$$E_{\rho_1\rho_2}(z_1,\ z_2;\ \mu_1,\ \mu_2)=E_{\rho_1}(z_1,\ \mu_1)\,E_{\rho_2}(z_2,\ \mu_2).$$

В заключение доказывается следующая общая теорема о приближении целыми функциями:

Пусть имеем две системы лучей, исходящих из начала координат:

$$\begin{aligned}&\arg z_1=\varphi_k\quad(k=1,\ 2,\ldots,\ n)\quad 0\leqslant\varphi_1<\varphi_2<\ldots<\varphi_n<2\pi,\\&\arg z_2=\psi_j\quad(j=1,\ 2,\ldots,\ m)\quad 0\leqslant\psi_1<\psi_2<\ldots<\psi_m<2\pi.\end{aligned}\tag{1}$$

Любую пару лучей $|\varphi_k,\ \psi_j|$ назовем «четверть-плоскостью». Обозначим через $\{\Omega\}$ систему всевозможных «четверть-плоскостей» из (1), число которых равно mn. Обозначим, далее,

$$\alpha_1=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left\{\frac{\pi}{\varphi_{k+1}-\varphi_k}\right\},\quad\alpha_2=\max_{1\leqslant j\leqslant m}\left\{\frac{\pi}{\psi_{j+1}-\psi_j}\right\}.$$

Теорема. Если $\rho_k\geqslant\alpha_k$, $\frac{1}{2}<\mu_k<\frac{1}{2}+\frac{1}{\rho_k}$ $(k=1,\ 2)$, то для произвольной функции $F(z_1, z_2)$, определенной на $\{\Omega\}$ и удовлетворяющей условию

$$\iint\limits_{\{\Omega\}} |F(z_1 \cdot z_2)|^2 |z_1|^{2\mu_1\rho_1-\rho_1-1} |z_2|^{2\mu_2\rho_2-\rho_2-1} d|z_1| d|z_2| < \infty,$$

существуют целые функции $G_{\sigma_1\sigma_2}(z_1 \cdot z_2)$ порядка ρ_1 типа σ_1 по z_1 и порядка ρ_2 типа σ_2 по z_2, для которых

$$\lim_{\substack{\sigma_1\to\infty \\ \sigma_2\to\infty}} \iint\limits_{\{\Omega\}} |F(z_1 \cdot z_2) - G_{\sigma_1\sigma_2}(z_1 \cdot z_2)|^2 |z_1|^{2\mu_1\rho_1-\rho_1-1} |z_2|^{2\mu_2\rho_2-\rho_2-1} d|z_1| d|z_2| = 0.$$

С. Я. Альпер (*Ростов на Дону*). **Об асимптотических значениях наилучшего приближения аналитических функций в комплексной области.** Устанавливаются асимптотические значения для наилучшего приближения в круге $|z| \leqslant R$ аналитических функций вида

$$\frac{1}{(z-a)^k}\ (k \text{ — целое} \geqslant 1), \qquad \lg(z-a)$$

и

$$(z-a)^\alpha \quad (\alpha \text{ — вещественное}).$$

Особая точка $z=a$ расположена вне круга $|z| \leqslant R$. Указывается вид полиномов, дающих приближение асимптотическое к наилучшему.

Получена также асимптотическая формула для наилучшего приближения целой функции в круге $|z| \leqslant R$. Эта формула верна в общем случае только для некоторой последовательности натуральных значений n; она оказывается верной для всех n, когда коэффициенты степенного разложения функции убывают достаточно регулярно.

Асимптотические формулы для наилучшего приближения указанных функций на отрезке $[-1, +1]$ вещественной оси были найдены С. Н. Бернштейном. Переход к приближению в круге связан с использованием теоремы А. Н. Колмогорова, дающей характеристическое свойство полинома наилучшего приближения в комплексной области.

Получены асимптотические формулы для наилучшего приближения указанных здесь функций в односвязной области с гладкой границей, для которой угол между касательной и осью x, как функция длины дуги контура, удовлетворяет условию Липшица с показателем $\leqslant 1$.

Э. И. Аринь (*Рига*). **О понятии частичной непрерывности функций.** Пусть в пространстве E задана действительная функция $f(x)$ $(x \in E)$ и, кроме того, выделена некоторая система $\mathfrak{M}$ подмножеств M этого пространства. Функция $f(x)$ называется частично непрерывной относительно системы $\mathfrak{M}$, если $f(x \mid M)$ непрерывна для любого $M \in \mathfrak{M}$.

I. Приводятся следующие примеры этого понятия.

Пусть $\mathfrak{M}$ — система всех простых плоских дуг $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Функция $f(x, y)$, частично непрерывная относительно $\mathfrak{M}$, непрерывна по совокупности переменных. Однако если $\mathfrak{M}$ содержит только дуги, для которых $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ удовлетворяют условию Липшица, то существует разрывная функция $F(x, y)$, частично непрерывная относительно $\mathfrak{M}$. Оба эти утверждения могут быть значительно усилены.

II. Доказывается, что при некоторых условиях функция, частично непрерывная относительно $\mathfrak{M}$, может быть представлена как предел последовательности непрерывных в E функций, равномерно сходящейся на каждом $M \in \mathfrak{M}$.

III. Изучается строение множества точек непрерывности частично непрерывной функции.

IV. Показывается, что для частично непрерывной относительно $\mathfrak{M}$ функции $f(x)$ существует некоторый естественный способ изменения топологии пространства E так, что функция $f(x)$ в новой топологии становится непрерывной.

М. Б. Балк (*Смоленск*). **Об одном аналоге теоремы Лиувилля.** Хорошо известен такой аналог теоремы Лиувилля: если мнимая часть целой функции $\Phi(z)$ ограничена (сверху или снизу) на всей плоскости, то $\Phi(z) = \text{const}$. Этот факт допускает следующее обобщение.

Теорема 1. Пусть $P(x, y)$ — многочлен степени s, $\Phi(z)$ — целая функция, D_+ (соотв. D_-) — множество всех точек плоскости, в которых $P(x, y) > 0$ (соотв. $P(x, y) < 0$). Если $\operatorname{Im}\Phi(z)$ ограничена (сверху или снизу) на D_+ и в то же время $\operatorname{Im}\Phi(z)$ ограничена (снизу или сверху) на D_-, то $\Phi(z)$ — многочлен степени не выше s.

Доказательство опирается на обобщение известного неравенства Адамара. При $P(x, y) \equiv 1$ (или -1) получаем вышеприведенный известный аналог теоремы Лиувилля.

При $P(x, y) \equiv y$ получаем в качестве следствия теорему, ранее доказанную (другим методом) в работе [1] (стр. 162): если целая вещественная функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условию $\operatorname{Im}\Phi(z) \geqslant 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$, то $\Phi(z)$ — линейная функция.

Сформулированная здесь теорема 1 допускает уточнения и обобщения, которые также приводятся в сообщении. В частности, устанавливается аналогичного типа теорема для мероморфных функций.

Лит.: 1. Чеботарев Н. Г. и Мейман Н. Н., Проблема Рауса—Гурвица для полиномов и целых функций, М.—Л., 1949.

А. В. Батырев (*Ростов на Дону*). **Об устойчивости решения краевой задачи Гильберта.** Задача Гильберта для односвязной жордановой области ставится следующим образом.

На плоскости комплексного переменного дана простая замкнутая кривая Жордана L, разбивающая плоскость на две односвязные области D^+ и D^-. На кривой L заданы три функции $a(t)$, $b(t)$ и $c(t)$, принимающие только вещественные значения. Требуется определить в области D^+ аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, для которой угловые предельные значения на L, $u(t)$ и $v(t)$ существуют почти всюду и удовлетворяют условию

$$a(t) \cdot u(t) + b(t) \cdot v(t) = c(t).$$

При этом как функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, так и контур L по характеру своей гладкости могут принадлежать к тем или иным соответствующим классам.

Ставится вопрос об устойчивости решения задачи Гильберта:

1) при малых вариациях функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ с сохранением принадлежности их к тому или иному классу,

2) при малых вариациях контура L с сохранением класса, к которому он принадлежит.

Задачу Гильберта для любой односвязной области можно свести с помощью конформного отображения к задаче Гильберта для единичного круга. Поэтому рассматривается именно этот случай.

Рассмотрено существование решения задачи Гильберта при различных предположениях относительно класса функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и контура L. В частности для однородной задачи в случае единичного круга доказано, что если функции $a(t)$ и $b(t)$ непрерывны, то решение $f(z)$ существует и принадлежит к классу H_p при любом $p > 0$.

Доказывается, что для единичного круга решение однородной задачи Гильберта устойчиво при малых вариациях функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и различных предположениях относительно их класса.

Вопрос об устойчивости решения задачи Гильберта при малых вариациях контура L сводится к вопросу об устойчивости решения при малых вариациях функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ для контура в виде единичной окружности. При этом предполагается, что функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ непрерывны.

В заключение доказывается основная теорема:

Если контур L является простой замкнутой кривой Жордана, а функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ непрерывны на L, то решение задачи Гильберта существует и устойчиво при малых вариациях контура и коэффициентов с сохранением их классов.

П. П. Белинский (*Львов*). **О существовании решения вариационных задач квазиконформных отображений.** В докладе рассмотрены вариации отображений, принадлежащих замыканию класса квазиконформных отображений с ограниченной характеристикой.

Рассмотрение показывает, что вариации отображений, принадлежащих замыканию класса квазиконформных отображений, можно проводить вполне аналогично вариации достаточно гладких квазиконформных отображений.

Е. А. Бредихина (*Куйбышев*). **О наилучших приближениях почти-периодических функций.** Пусть фиксирована последовательность вещественных чисел $\{\lambda_k\}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\lambda_0 = 0$; $\lambda_k > 0$, $\lambda_k < \lambda_{k+1}$ при $k \geqslant 1$; $\lambda_{-k} = -\lambda_k$; $\lambda_k \to \infty$ при $k \to \infty$).

Почти-периодическая функция $f(x)$ принадлежит классу $Q\{\lambda_k\}$, если ее ряд Фурье имеет вид $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_{\lambda_{m_k}} e^{i\lambda_{m_k}x}$, где m_k — целые числа, $\lambda_{m_0} = \lambda_0$; $\lambda_{m_{-k}} = \lambda_{-m_k}$ и $|A_{\lambda_{m_k}}| + |A_{\lambda_{m_{-k}}}| > 0$ при $k \neq 0$.

Почти-периодическая функция $f(x)$ принадлежит классу $L\{\lambda_k\}$, если $f(x) \in Q\{\lambda_k\}$ и, кроме того,

$$A_{\lambda_{m_0}} = 0, \quad \arg A_{\lambda_{m_{-k}}} = -\arg A_{\lambda_{m_k}}, \quad \frac{\lambda_{m_{k+1}}}{\lambda_{m_k}} = q_k \geqslant \theta > 1.$$

Для $f(x) \in Q\{\lambda_k\}$ имеют место оценки наилучшего приближения

$$E_n(f) = \inf \left\{ \sup_x \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i\lambda_k x} \right| \right\}$$

(содержащие в себе джексоновские оценки), из которых следует, что порядок убывания $E_n(f)$ зависит как от дифференциальных свойств приближаемой функции, так и от характера роста неотрицательных членов последовательности $\{\lambda_k\}$.

На наилучшие приближения почти-периодических функций, принадлежащих классу $L\{\lambda_k\}$, обобщаются результаты, относящиеся к наилучшим приближениям периодических функций, представимых лакунарными тригонометрическими рядами (см. [1]).

Лит.: 1. Стечкин С. Б., ДАН СССР 76, № 1, (1951).

Б. М. Гагаев (*Казань*). **Некоторые свойства ортогональных функций.** Для ортогональных систем справедливы следующие положения:

1. Для того чтобы существовала бесконечная ортогональная относительно интегрального веса $\psi(x)$ система функций с равномерно ограниченным числом перемен знака, необходимо, чтобы она состояла из функций $\varphi_n(x)$, для которых, при любом $\alpha > 0$, нижний предел интегралов

$$\int\limits_{\sigma_n} d\psi(x),$$

где σ_n — множество, на котором $|\varphi_n(x)| > \alpha$ был бы равен нулю. Следовательно, это — функции, аналогичные известному функционалу H Хаара.

2. Множество перемен знака функций, принадлежащих замкнутой ортогональной системе, всюду плотно на отрезке ортогональности.

Ф. Д. Гахов (*Ростов на Дону*), **Ю. М. Крикунов** (*Казань*). **Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложение к решению обратных краевых задач.** В первой части работы производится обобщение соотношений, выведенных М. Морсом [1], между числом нулей, полюсов, точек ветвления и т. п. псевдогармонических и псевдоаналитических функций. Обобщение производится в следующих направлениях.

1. Допускаются области бесконечные, а также многолистные без точек ветвления.

2. В области могут быть одновременно следующие особенности: полюсы любого порядка, логарифмические полюсы. При этом допускается совпадение в одной точке полюса первого порядка и логарифмического полюса.

3. Допускаются граничные значения псевдогармонических функций, принимающие на конечном числе дуг постоянные значения, а также имеющие конечное число точек нулевого градиента. Для этих случаев производится подсчет граничного индекса.

4. Дается способ определения кратности неполного разветвленного элемента во всех случаях.

Во второй части работы дается приложение указанных выше результатов к решению обратной краевой задачи. Последняя заключается в отыскании контура области по заданным на нем значениям функции, аналитической в области за исключением фиксированных точек, где допускаются полюсы или логарифмические полюсы. Непосредственная задача заключается в определении числа точек ветвления искомой аналитической функции с заданными особенностями по ее граничным значениям.

Лит.: 1. Морс М., Топологические методы теории функций комплексного переменного, ИЛ, М., 1951.

С. А. Гельфер (*Горький*). **О максимуме конформного радиуса фундаментальной области данной группы.** Рассматривается семейство $S_a(\omega_1, \omega_2)$ функций $w = f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, регулярных в круге $|z| < 1$ и однолистно отображающих этот круг на области D, которые обладают следующими свойствами:

1) область D не содержит точек, конгруентных по отношению к группе T линейных преобразований $w' = w + m_1\omega_1 + m_2\omega_2$, где ω_1, ω_2 — постоянные и $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ недействительно; m_1 и m_2 — любые целые числа;

2) область D не содержит данной системы точек $a_1, \ldots, a_m$ и точек, конгруентных им по отношению к группе T.

Ставится задача: среди всех функций класса $S_a(\omega_1, \omega_2)$ найти ту, для которой функционал $|f'(0)|$ принимает наибольшее значение.

Доказывается, что экстремальная функция $w = f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{z^2 w'^2} = A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_i \zeta(w - a_i) + A_{m+1}\zeta(w) + \rho(w),$$

где $\zeta(w)$ и $\rho(w)$ — функции Вейерштрасса, A_i $(i = 0, 1, \ldots, m+1)$ — постоянные. Отсюда получается, что экстремальная область D есть фундаментальная область группы T с кусочно-аналитической границей и с внутренними кусочно-аналитическими разрезами, оканчивающимися в точках $a_1, \ldots, a_m$.

В некоторых частных случаях получаются и точные количественные оценки. Как предельный случай при $\omega_1 = \infty$ и $\omega_2 = \infty$ получается формула М. А. Лаврентьева, а при $m = 1$ — теорема Кёбе—Бибербаха. При $\omega_2 = \infty$ и фиксированном $\omega_1 > 0$ получается, что наибольший конформный радиус в классе $S(\omega_1, \infty)$ имеет полоса $-\frac{\omega_1}{2} \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant \frac{\omega_1}{2}$.

Исследование ведется на основе вариационных формул для класса $S_a(\omega_1, \omega_2)$.

Я. Л. Геронимус (*Харьков*). **О некоторых достаточных условиях сходимости процесса Фурье—Чебышева.** Рассматриваются многочлены, ортонормальные на отрезке $[-1, +1]$ относительно обложения $d\psi(x)$, и некоторая функция $f(x)$, определенная на этом отрезке; в таблице приведены некоторые условия, достаточные для сходимости разложения функции $f(x)$ в ряд ортогональных многочленов.

Введено обозначение $t(x) = \sqrt{1-x^2}\,\psi'(x)$; через $\omega(\delta; f)$, $\omega(\delta; t)$ обозначены модули непрерывности функций $f(x)$, $t(x)$ на внутреннем отрезке $[a, b]$; через

$\omega_2(\delta; f)$, $\omega_2(\delta; t)$ обозначены интегральные модули непрерывности функций $f(\cos\varphi)$, $t(\cos\varphi)$ в метрике пространства $L_2(-\pi, \pi)$.

Через C, AC обозначены классы функций — соответственно непрерывных, абсолютно непрерывных.

Условие I (см. табл.) обеспечивает квазиравномерную сходимость внутри отрезка $[a, b]$; условия III, IV обеспечивают равномерную сходимость на всем отрезке $[-1, +1]$, а условие II дает равномерную сходимость внутри отрезка $[a, b]$.

Таблица

	Условия на отрезке $[-1, +1]$		Условия на отрезке $[a, b]$	
N	$t(x)$	$f(x)$	$t(x)$	$f(x)$
I	$\lg t(\cos\varphi) \in L$	$\int_{-1}^{1}[f(x)]^2 d\psi(x) < \infty$	$\psi(x) \in AC$, $t(x) \in C$ $\omega(\delta; t) = O(\delta^\alpha)$, $\alpha > \frac{1}{2}$ $0 < m \leqslant t(x)$	$f(x) \in C$ $\int_0^a \left\{\frac{\omega(x; f)}{x}\right\}^2 dx < \infty$
II	$\psi(x) \in AC$ $t(x) \leqslant M$ $\lg t(\cos\varphi) \in L$	$f(\cos\varphi) \in L_2$	$t(x) \in C$ $\omega(\delta; t) = O(\delta^\alpha)$, $\alpha > \frac{1}{2}$ $0 < m \leqslant t(x)$	$f(x) \in C$ $\omega(\delta; f) = o\left(\frac{1}{\lg \frac{1}{\delta}}\right)$
III	$0 < m \leqslant t(x)$	$f(x) \in C$ $\omega(\delta; f) = o(\sqrt{\delta})$		
IV	$\psi(x) \in AC$ $0 < m \leqslant t(x) \leqslant M$	$f(x) \in C$ $\omega(\delta; f)\,\omega_2^2(\delta; t) =$ $= o\left(\frac{\delta}{\lg \frac{1}{\delta}}\right)$		

Аналогичного типа теоремы имеют место и при других предположениях на функции f, ψ.

А. В. Гладкий (*Барнаул*). **Об эффективно неограниченных аддитивных функциях множеств.** Назовем функцию множеств $\varphi(M)$, определенную на вполне аддитивной системе множеств $\mathfrak{M}$, эффективно неограниченной, если можно, не пользуясь аксиомой выбора, указать для каждого натурального n такое множество $M_n \in \mathfrak{M}$, что $|\Phi(M_n)| > n$.

В сообщении доказывается, что из существования эффективно неограниченной аддитивной функции множеств (такая функция, как известно, не может быть вполне аддитивной) можно без использования аксиомы выбора вывести существование неизмеримой функции точки.

И. И. Данилюк (*Львов*). **О квази-аналитических функциях многих переменных на многообразиях.** На четномерных топологических многообразиях рассматриваются эллиптические системы дифференциальных уравнений первого порядка и их решения — квази-аналитические функции. Доказывается локальная теорема существования регулярных квази-аналитических функций.

На определенном классе квази-аналитических функций вводится интегральная метрика и доказываются полнота класса в этой метрике и его сепарабельность. Приводятся формулы, решающие некоторые граничные задачи рассматриваемых систем, в частности, обобщающие на рассматриваемый случай интегральную формулу Коши для аналитических функций многих комплексных переменных.

М. М. Джрбашян (*Ереван*). **О взвешенно-полиномиальном приближении в комплексной области.** Доклад посвящается обзору ряда результатов, полученных автором в теории весовых приближений. Предполагается кратко изложить следующие вопросы.

1. Вопросы полноты полиномов при взвешенном приближении на бесконечных кривых. Выяснение взаимной связи между порядком убывания веса и метрическими свойствами тех кривых, на которых происходит аппроксимация.

В различных конкретных случаях приводятся точные интегральные критерии полноты полиномов. Например, имеет место такой результат: если четная функция $p(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ представляется в виде

$$p(x) = p(1) + \int_1^x \frac{\omega(t)}{t}\, dt,$$

где $\omega(t)$ — неубывающая при $t \uparrow +\infty$, то при условии $\int^{\infty} p(r) \exp\left\{-\frac{\pi}{\Delta} r\right\} dr = +\infty$ система полиномов полна при приближении с весом $\exp\{-p(r)\}$ на параллельных прямых, составляющих полосу шириной Δ.

2. Вопросы оценки производных полиномов, имеющих функциональную мажоранту на кривых в комплексной области. Среди различных результатов, полученных в этом направлении, приведем следующий: пусть для последовательности полиномов $\{P_n(x)\}$ имеет место оценка

$$|P_n(x)| \leqslant e^{p(x)}, \qquad -\infty < x < +\infty,$$

где $P_n(x)$ — полином степени n, а $y = p(x)$ — монотонно возрастающая четная функция; тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| P_n^{(k)}(x) \right| \left(\int_1^n \frac{dy}{q(y)} \right)^{-k} \leqslant R_k e^{p(x)}, \quad -\infty < x < +\infty \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $R_k = k! \left[\left(1 + \frac{2}{\pi}\right)\frac{e}{k}\right]^k$, а $x = q(y)$ есть функция, обратная к $y = p(x)$.

3. Вопросы наилучшего взвешенного приближения. Здесь установлен ряд результатов, где из данных о порядке убывания взвешенно-наилучшего приближения делаются заключения о дифференциальных свойствах приближаемых функций. В частности, для случая приближения на всей оси $-\infty < x < +\infty$, в отличие от случая приближения на конечном отрезке (когда шкалой служат порядки убывания вида $\frac{1}{n^p}$), здесь для характеристики дифференциальных свойств приближаемых функций служат порядки убывания

$$\left[\int_1^n [q(y)]^{-1}\, dy\right]^{-p}.$$

В. К. Дзядык (*Луцк*). **Точная оценка наилучших приближений для одного класса периодических функций.** Обозначим через $H^{(s)}$ и H_L^s классы периодических функций $f(t)$ периода 2π, имеющих почти всюду производную, вообще говоря, дробную (в смысле Вейля), порядка $s\ (s>0)$, удовлетворяющую, соответственно, условиям $|f^{(s)}(t)|\leqslant 1$ и $\int\limits_0^{2\pi}|f^{(s)}(t)|\,dt\leqslant 1$. Через H_n^s обозначим подкласс тех функций класса H^s, у каждой из которых все коэффициенты Фурье до $(n-1)$-го порядка включительно равны нулю.

Пусть $E_n(f)$ — наилучшее равномерное и $E_n(f)_L$ — наилучшее в среднем приближение функции $f(t)$ при помощи тригонометрических полиномов $T_n(t)$ порядка n.

Пусть, наконец,

$$\psi_s(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\left(kt-\frac{s\pi}{2}\right)}{k^s}.$$

Воспользовавшись тем обстоятельством, что каждая из функций классов H^s и H_L^s выражается через свою производную $f^{(s)}(t)$ в виде:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}f^{(s)}(t-\xi)\,\psi_s(\xi)\,d\xi,$$

Ж. Фавар в 1936 г. доказал, что

$$\sup_{f\in H_n^s}|f(t)|=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{K_s}{n^s},$$

где

$$K_s=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^{i(s+1)}}{(2i+1)^{s+1}}.$$

Затем Ж. Фавар и независимо от него Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн доказали теорему, гласящую, что при целых s

$$\sup_{f\in H^s}E_{n-1}(f)=\frac{4}{\pi}\frac{K_s}{n^s}.$$

Кроме того, был указан линейный метод, состоящий в том, что каждой функции

$$f(t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),\qquad f(t)\in H^s$$

ставился в соответствие тригонометрический полином

$$T_n(f;\,s,\,t)=\sum_0^n\lambda_k^{(s,n)}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

такой, что

$$\sup_{f\in H^s}\|f(t)-T_{n-1}(f;\,s,\,t)\|_c=\sup_{f\in H^s}E_{n-1}(f)_c.$$

В силу этого соотношения данный линейный метод являлся на классе H^s наилучшим среди возможных.

Все эти результаты позже были перенесены также на пространство L и опять доказывались только для случая целых s. Если же s — число дробное, то этот случай представляет специфические трудности в связи с наличием в ряде Фурье для функции $\psi_s(t)$ как синусов, так и косинусов. (Впервые этот вопрос был поставлен Фаваром в 1937 г.). Б. Надь в 1938 г. оценил сверху величину $E(\psi_s)_L$ для произвольных $s>0$.

В работе [1] нами найдено точное значение величины $E_n(\psi_s)_L$ для случая $0<s<1$ (см. ниже равенство (1)). Для этого производится исследование поведения функции

$$W_n(t)=\frac{1}{\sin nt}\left[\psi_s(t)-T_{n-1}^x(t)\right]$$

(где $T_{n-1}^x(t)$ — тригонометрический полином $(n-1)$-го порядка, интерполирующий функцию $\psi_s(t)$ в точках $t_k=\frac{k\pi}{n}$ $(k=1, 2,\ldots, 2n-1)$) и доказывается, что разность $\psi_s(t)-T_{n-1}^x(t)$ меняет знак только в точках t_k $(k=1, 2, \ldots, 2n-1)$ и, кроме того, в точке $t=0$. Отсюда при помощи известных в теории приближений рассуждений (см. [2]) выводятся следующие факты:

$$\sup_{f\in H^s} E_{n-1}(f)=\sup_{f\in H^s_L} E_{n-1}(f)_L=E_{n-1}(\psi_s)_L=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\psi_s(t)-T_{n-1}^x(t)\right|dt=$$

$$=\frac{4}{\pi}\frac{\sin\frac{s\pi}{2}K_s}{n^s}, \tag{1}$$

где

$$K_s=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^{s+1}}.$$

Наконец, указывается линейный метод, являющийся для классов функций H^s и H^s_L наилучшим среди возможных.

Лит.: 1. Дзядык В. К., Изв. АН СССР, сер. матем., 17, (1953), 135—162. 2. Никольский С. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 10, (1946), 207—256.

В. К. Дзядык (*Луцк*). **О приближении многочленами непериодических функций, удовлетворяющих условию Lip α $(0<\alpha<1)$.** В теории приближения функций хорошо известно, что для того, чтобы некоторая периодическая функция $f(t)$ имела r-ю производную $f^{(r)}(t)$, принадлежащую классу Lip α $(0<\alpha<1)$, необходимо и достаточно, чтобы для этой функции при всех n выполнялось условие:

$$E_n(f)\leq\frac{C}{n^{r+\alpha}}, \tag{1}$$

где C — постоянная, а через $E_n(f)$ обозначена величина наилучшего равномерного приближения функции $f(t)$ при помощи тригонометрических полиномов n-го порядка.

Необходимость этого условия была в 1911 г. доказана Д. Джексоном, а достаточность — в 1912 г. С. Н. Бернштейном и в 1919 г. Валле Пуссеном.

В то же время был изучен вопрос о наилучшем приближении при помощи обыкновенных многочленов заданного порядка n непериодических функций $f(x)$, определенных в некотором сегменте $[a, b]$. Однако результаты, полученные для этого случая, носили менее законченный характер, ибо, хотя неравенство (1) оставалось справедливым и для этого случая (Д. Джексон), С. Н. Бернштейн показал, что из выполнения условия (1) следует только, что r-я производная $f^{(r)}(x)$ функции $f(x)$ удовлетворяет условию Lip α на всяком сегменте $[a', b']$, целиком содержащемся в интервале (a, b).

Таким образом, в непериодическом случае теорема Джексона не допускала обращения.

Первый существенный результат по этому вопросу был получен в 1946 г. С. М. Никольским [1], который усилил теорему Джексона для случая приближения непериодических функций, принадлежащих классу Lip 1.

Наконец, в 1951 г. А. Ф. Тиман, применив иной метод, в своей докторской диссертации, а также в двух работах, напечатанных в ДАН СССР, доказал одну общую теорему, из которой, как следствие, вытекает, что если непериодическая функция $f(x)$, определенная на сегменте $[-1, 1]$, имеет r-ю ($r \geqslant 0$) производную, принадлежащую классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, то для любого $n = 1, 2, \ldots$ найдется обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени $\leqslant n$, удовлетворяющий для каждого $x \in [-1, 1]$ неравенству

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{C}{n^{r+\alpha}}\left[\left(\sqrt{1-x^2}\right)^{r+\alpha} + \frac{1}{n^{r+\alpha}}\right], \tag{2}$$

где C — постоянная, не зависящая от x и n.

С другой стороны, верно и обратное утверждение. Именно, можно доказать, что справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — функция, заданная на сегменте $[-1, 1]$. Если при всяком натуральном n найдется многочлен $P_n(x)$ степени, не выше n, такой, что для всех $x \in [-1, 1]$ будет выполняться неравенство (2), то тогда функция $f(x)$ имеет на сегменте $[-1, 1]$ r-ю производную $f^{(r)}(x)$, принадлежащую классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Из этой теоремы и теоремы А. Ф. Тимана вытекает следующая

Теорема 2. Для того, чтобы функция $f(x)$, заданная на сегменте $[-1, 1]$, имела при некотором целом неотрицательном r производную r-го порядка $f^{(r)}(x)$, принадлежащую классу $\mathrm{Lip}\,\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы для любого натурального n нашелся обыкновенный многочлен $P_n(x)$ степени, не выше n, такой, чтобы при всех $x \in [-1, 1]$ выполнялось неравенство (2).

Отметим, что теорема 1 может быть рассматриваема так же, как обобщение упомянутой выше теоремы С. Н. Бернштейна для непериодического случая.

Лит.: 1. Никольский С. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 10, (1946), 295—317.

С. И. Зуховицкий (*Киев*). **Об одной минимум-задаче проблемы моментов.** Пусть G — подпространство линейного нормированного пространства E. Каждый линейный непрерывный функционал (л. н. функционал) $\varphi(x)$, определенный в G, может быть расширен на все пространство E с сохранением нормы. Такое расширение является минимальным в том смысле, что всякое другое расширение л. н. функционала $\varphi(x)$ на все E может быть осуществлено лишь л. н. функционалом с нормой, не меньшей $\|\varphi\|$. Минимальное расширение может оказаться не единственным.

Изучается общая характеристика всех минимальных расширений л. н. функционала $\varphi(x)$ в том случае, когда E является функциональным пространством $C(a, b)$ действительных, непрерывных на сегменте $[a, b]$ функций $x(t)$ с нормой $\|x\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$.

Случаи пространств l_p $(p \geqslant 1)$ и c рассмотрены в работе Рогозинского [1].

Теорема 1. Если л. н. функционал $\varphi(x)$, определенный в подпространстве $G \subset C(a, b)$, имеет максимальный элемент $X(t) \in G$, т. е. $\|X\| = 1$ и $\varphi(X) = \|\varphi\|$, то ядра $g(t)$ всех его минимальных расширений $f(x) = \int\limits_a^b x(t)\,dg(t)$ имеют одинаковую структуру в том смысле, что все $g(t)$ постоянны на одних и тех же интервалах из $[a, b]$, где $X(t) < 1$, не убывают в каждой точке одного и того же замкнутого множества $F^{+} \subset [a, b]$, где $X(t) = +1$, и не возрастают в каждой точке одного и того же замкнутого множества $F^{-} \subset [a, b]$, где $X(t) = -1$.

Из этой теоремы следует, что если максимальный элемент $X(t)$ л. н. функционала $\varphi(x)$, определенного в G, обладает тем свойством, что равенство $|X(t)| = 1$ имеет место лишь в конечном числе точек $t_1, t_2, \ldots, t_m$ сегмента $[a, b]$, то *все* ядра $g(t)$ минимальных расширений $\varphi(x)$ являются ступенчатыми функциями, имеющими скачки лишь в этих точках.

Например, n-мерное подпространство $G \subset C(a, b)$ с базисом $t, t^2, \ldots, t^n$ имеет максимальный элемент вида $a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_n t^n$, так что предыдущее условие выполняется, причем $m = n + 1$.

В случае бесконечномерного подпространства $G \subset C(a, b)$, в частности, когда $G = C(a, b)$ максимального элемента у данного л. н. функционала может не существовать. Для формулировки условий его существования введем такие определения: точка $t_0 \in [a, b]$ называется *точкой постоянства* функции $g(t)$, если существует интервал $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, в котором $g(t) = g(t_0)$; точка t_0 называется *точкой возрастания (убывания)* функции $g(t)$, если она не является ее точкой постоянства и существует интервал $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, в котором она не убывает (не возрастает).

Теорема 2. Для того, чтобы л. н. функционал $f(x) = \int\limits_a^b x(t)\, dg(t)$, определенный в $C(a, b)$, имел в этом пространстве максимальный элемент $X(t)$, необходимо и достаточно, чтобы его ядро $g(t)$ удовлетворяло следующим условиям:

1) каждая точка сегмента $[a, b]$ является либо точкой возрастания, либо точкой убывания, либо точкой постоянства функции $g(t)$;

2) множества точек возрастания и убывания функции $g(t)$ замкнуты (и, очевидно, не пересекаются).

Таким образом, ни одна точка сегмента $[a, b]$ не должна быть точкой колебания или точкой собственного экстремума функции $g(t)$.

Несколько видоизмененную формулировку получают эти теоремы в случае комплексного пространства $C(a, b)$.

Лит.: 1. W. W. Rogosinski, Math. Zeitschr., 63, (1955), 97—108.

Ю. А. Казьмин (*Зерновой*). **О полных системах в гильбертовом пространстве.** Рассматриваются вопросы, связанные с проблемой полноты в L_2 в известном смысле «близких» систем функций. Отправным пунктом служит такое простое соображение: пусть множество $G \subset L_2$ всюду плотно в L_2 и образует полное пространство типа (B); если T — линейный, ограниченный, обратимый оператор в G, а $\{g_n\}$ — базис (или полная система) в G, то тем же свойством обладает система функций $\{f_n = Tg_n\}$. Ввиду того, что G всюду плотно в L_2, система $\{f_n\}$, полная в G, полна в L_2.

1. $G \equiv L_2$. Пусть $\{g_n\}$ — полная минимальная система функций, а $\{h_n\}$ — последовательность, образующая с $\{g_n\}$ биортогональную систему ($\{h_n\}$ существует [1]).

Теорема 1. Если $\{g_n\}$ — базис (или полная минимальная система) в L_2, а последовательность $\{f_n\}$ такова, что

$$\sum_i \sum_k (R_i;\ R_k)(h_i;\ h_k) < 1,$$

где $R_n = f_n - g_n$, $(g_n, h_k) = \delta_{nk}$, то $\{f_n\}$ — базис (соответственно, полная система) в L_2.

Теорема 2. Пусть $\{g_n\}$ — базис (или полная минимальная система) в L_2; тогда и $\{f_n\}$ — базис (соответственно полная система) в L_2, если функции $\{f_n\}$ линейно независимы в L_2 (соответственно минимальны), а

$$\sum_i \sum_k (R_i;\ R_k)(h_i;\ h_k) < \infty,$$

где $R_n = f_n - g_n$, $(g_n;\ h_k) = \delta_{nk}$.

Пространства коэффициентов разложений по системам $\{g_n\}$ и $\{f_n\}$ совпадают (ср. с результатами работы [2]).

В этих случаях $\lambda = 1$ является регулярным значением интегрального уравнения

$$f(x) = g(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x, s)\, g(s)\, ds \tag{1}$$

с ядром $K(x, s) = \sum_i R_i(x) h_i(s)$, суммируемым с квадратом ((1) определяет оператор T).

Если $\{g_n\}$ и $\{h_n\}$ образуют полную биортогональную систему (т. е. обе системы $\{g_n\}$ и $\{h_n\}$ одновременно полны в L_2), то в рассмотренных случаях существует последовательность $\{F_n\}$, образующая с $\{f_n\}$ также полную биортогональную систему.

2. $G \neq L_2$. Пусть $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормированная система в L_2. Функция $f = \sum c_k \varphi_k \subset L_2$ принадлежит G тогда и только тогда, когда $\sum |c_k| < \infty$ $\left(\|f\|_G = \sum |c_k|\right)$.

Теорема 3. Если система $\{f_n\}$ такова, что $\sup\limits_n |(R_n, \varphi_k)| = \alpha_k$, $R_n = f_n - \varphi_n$, $\sum \alpha_k < 1$, то $\{f_n\}$ — базис в G.

Теорема 4. Для того чтобы система $\{f_n\}$, у которой $\sup\limits_n |(R_n, \varphi_k)| = \alpha_k$, $R_n = f_n - \varphi_n$, $\sum \alpha_k < \infty$, была базисом в G, необходимо и достаточно, чтобы из $\sum c_n f_n = 0$, $\sum |c_n| < \infty$, немедленно следовало $c_n = 0$ для всех n.

Так как G всюду плотно в L_2, то $\{f_n\}$ полна в L_2.

Лит.: Левин С. С., Mathem. Zeitschr., Bd. 32, H. 4, (1930), 503. 2. Бари Н. К., Учен. зап. Моск. гос. унив., Математика, т. IV, вып. 148, (1951), 69—107.

А. А. Козманова (*Свердловск*). **Теорема Полиа для целых функций двух комплексных переменных.** Пусть мы имеем целую функцию двух комплексных переменных экспоненциального типа

$$F(p_1, p_2) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_{nm} p_1^{n-m} p_2^m.$$

Вектор $\bar{p}(p_1, p_2, p_3)$ называется изотропным, если $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0$. Сопоставим $F(p_1, p_2)$ целую функцию от изотропного вектора таким образом:

$$F(\bar{p}) = F(p_1, p_2, + ip_3) + F^*(p_1, p_2 - ip_3) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_{nm} p_1^{n-m} (p_2 + ip_3)^m + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} a_{nm}^* p_1^{n-m} (p_2 - ip_3)^m.$$

Ассоциированной с $F(\bar{p})$ функцией назовем гармоническую функцию

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+1} (n-m)!\, a_{nm} P_n^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{m+1} (n-m)!\, a_{nm}^* P_n^m(\cos\theta)\, e^{-im\varphi}.$$

Для $F(\bar{p})$ и $f(r, \theta, \varphi)$ имеет место теорема, аналогичная теореме Полиа из теории целых функций о связи между индикатриссой роста целой функции и опорной функцией выпуклой оболочки множества особенностей ассоциированной с ней функции.

П. П. Куфарев (*Томск*). **О методе параметрических представлений и вариационном методе Г. М. Голузина.** 1. В докладе излагаются результаты некоторых работ по изучению метода параметрических представлений и вариационного метода Г. М. Голузина, выполненных мной, а также работ, выполненных автором совместно с М. Р. Куваевым и Н. В. Семухиной.

2. Известно, что вариационный метод Г. М. Голузина опирается на полученную им формулу для вариации функции, отображающей круг на односвязную область, при вариации границы области.

3. Нами дан новый вывод вариационной формулы Г. М. Голузина из установленного ранее (см. [1]) дифференциального уравнения для функции, отображающей круг на однопараметрическое семейство областей. При этом формула Г. М. Голузина получила другое, интегральное представление.

4. Вывод легко распространяется на случай функций класса Σ. Это приводит к некоторому обобщению вариационной формулы Г. М. Голузина для подкласса Σ_0 функций класса Σ, не принимающих значения нуль.

5. Метод вывода распространяется также на случай двусвязных областей, причем вместо формулы Шварца используется формула Вилля. Таким образом, мы совместно с Н. В. Семухиной получили вариационную формулу для функций, однолистных в кольце, аналогичную формуле Г. М. Голузина для функций, однолистных в круге. Это дает возможность во многих задачах об экстремумах функционалов на тех или иных классах функций, однолистных в кольце, устанавливать дифференциальное уравнение для экстремальных функций, откуда обычным образом следует, что (двусвязные) экстремальные области получаются из плоскости проведением разрезов по конечному числу аналитических кривых.

6. Предложен некоторый метод изучения экстремальных задач теории однолистных функций, в определенном смысле объединяющий метод параметрического представления и вариационный метод Г. М. Голузина. При характеристике метода остановимся для определенности на некоторой простейшей экстремальной задаче для функций $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, однолистных в круге $|z|<1$. Метод основывается на выводе дифференциального уравнения типа $\left(F^{-1}\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2=\frac{A(z)}{B(F,\tau)}$ для функции $F(z,\tau)$, отображающей круг на область, получаемую из плоскости проведением переменного разреза C_τ по части границы экстремальной области и, с другой стороны, дифференциального уравнения Левнера для $F(z,\tau)$. Метод обычно сводит экстремальную задачу к своеобразной граничной задаче для некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

7. Совместно с М. Р. Куваевым дан вывод дифференциального уравнения типа уравнения Левнера для функции, отображающей круг на однопараметрическое семейство областей, получаемых из заданной n-связной области проведением переменного разреза.

8. Ранее было предпринято детальное изучение свойств уравнений типа уравнения Левнера. Указаны некоторые достаточные условия того, чтобы интеграл уравнения Левнера отображал круг на круг с разрезом. Исследована и сведена к интегральным уравнениям задача определения уравнения Левнера для функции, отображающей круг на плоскость с переменным разрезом по части заданной кривой (с ограниченной кривизной). Исследован случай существования рациональных интегралов обобщенного уравнения Левнера, что дало возможность предложить некоторый метод численного определения параметров в интеграле Шварца—Кристофеля. Недавно этот метод детально разработан Ю. В. Чистяковым.

Лит.: 1. Куфарев П. П., Матем. сб. 13 (55) : 1, (1943).

А. Ф. Леонтьев (*Москва*). **Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка.** Пусть $\{\lambda_n\}$, $|\lambda_n|\uparrow\infty$ — последовательность точек в плоскости комплексного переменного z, $[\rho,\infty]$ — класс целых функций порядка, меньшего или равного ρ, $[\rho,\infty)$ — класс целых функций порядка, меньшего ρ, или порядка ρ конечного типа.

Автором [1] был установлен следующий результат: для того чтобы по любой системе чисел $\{a_n\}$, удовлетворяющей условию $|a_n|<e^{|\lambda_n|^{\rho+\varepsilon}}$, $n>N|\varepsilon|$, имелась в $[\rho,\infty]$ хотя бы одна функция $u(z)$ со свойством $u(\lambda_n)=a_n$ $(n=1,2,\ldots)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность узлов $\{\lambda_n\}$ удовлетворяла условиям:

1) показатель сходимости последовательности $\{\lambda_n\}$ должен быть не больше ρ, т. е. при любом $\varepsilon>0$ $\sum\limits_1^\infty|\lambda_n|^{-\rho-\varepsilon}<\infty$,

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{\ln\ln\left|\dfrac{1}{F'(\lambda_n)}\right|}{\ln|\lambda_n|}\leqslant\rho$, $F(z)=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{z}{\lambda_n}\right)e^{\frac{z}{\lambda_n}+\frac{z^2}{2\lambda_n^2}+\ldots+\frac{z^k}{k\lambda_n^k}}$ (k — наименьшее целое число, при котором $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\lambda_n|^{-k-1}<\infty$).

Можно показать, что второе условие эквивалентно следующему:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \ln \left| \frac{1}{\eta_n} \right|}{\ln |\lambda_n|} \leqslant \rho, \quad \eta_n = \prod_{\substack{|\lambda_n-\lambda_m|<1 \\ m\neq n}} (\lambda_n - \lambda_m).$$

Первое условие означает, что плотность расположения точек λ_n в плоскости не должна быть большой, второе, более сложное условие, означает, что расстояние между соседними точками из $\{\lambda_n\}$ не должно по мере удаления от начала быстро стремиться к нулю.

В данном сообщении рассматривается следующий вопрос: каковы должны быть числа $a_n (n = 1, 2, \ldots)$ для того, чтобы в классе $[\rho, \infty]$ имелась хотя бы одна интерполирующая функция, если $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет первому условию и, возможно, не удовлетворяет второму условию?

Обозначим через $\mu_1^{(n)} \left(\mu_1^{(n)} = \lambda_n\right)$, $\mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_{s_n}^{(n)}$ те точки из $\{\lambda_m\}$, которые лежат в круге радиуса 1 с центром в λ_n, а через $\alpha_1^{(n)} \left(\alpha_1^{(n)} = a_n\right)$, $\alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_{s_n}^{(n)}$ — те числа из $\{a_m\}$, которые должны быть значениями в указанных точках искомой интерполирующей функции. Введем величины

$$[\alpha_1^{(n)}] = \mu_1^{(n)} \alpha_1^{(n)}, \quad [\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_k^{(n)}] = \mu_1^{(n)} \ldots \mu_k^{(n)} \sum_{p=1}^{k} \frac{\alpha_p^{(n)}}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{k} \left(\mu_p^{(n)} - \mu_j^{(n)}\right)}$$

$$(k = 2, 3, \ldots, s_n)$$

(сумма справа представляет собой разделенную разность) и максимум из их модулей обозначим через β_n.

Теорема. Для того чтобы при соблюдении условия 1) имелась в $[\rho, \infty]$ хотя бы одна функция $u(z)$ со свойством $u(\lambda_n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \ln \beta_n}{\ln |\lambda_n|} \leqslant \rho. \tag{1}$$

В случае класса $[\rho, \infty)$ условие 1) заменяется условием

3) $\varlimsup \frac{n}{|\lambda_n|^\rho} < \infty$, а соответствующая теорема формулируется так:

Теорема. Для того чтобы при соблюдении условия 3) имелась в $[\rho, \infty)$ хотя бы одна функция $u(z)$ со свойством $u(\lambda_n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \beta_n}{|\lambda_n|^\rho} < \infty. \tag{2}$$

Здесь β_n определены, как и выше, но, в отличие от предыдущего случая, под $\mu_1^{(n)}, \ldots, \mu_{s_n}^{(n)}$ понимаются те точки из $\{\lambda_m\}$, которые лежат в круге с центром в λ_n, радиуса $R_n = \delta |\lambda_n|$, где δ — фиксированное положительное число.

Если узлы λ_n расположены в угле $|\arg z| < \alpha < \pi$, то требования (1) и (2) оказываются необходимыми (а значит, и достаточными в силу сформулированных теорем) для разрешимости интерполяционной задачи в классе функций $f(z)$, регулярных в угле $|\arg z| < \beta$, $\beta > \alpha$, и удовлетворяющих там соответственно условию $|f(z)| < e^{|z|^{\rho+\varepsilon}}$, $|z| > r_0(\varepsilon)$, или условию

$$|f(z)| < e^{k|z|^\rho}, \quad k < \infty.$$

Лит.: 1. Леонтьев А. Ф., ДАН СССР 61, № 5 (1948), 785—787.

Г. Ф. Манджавидзе (*Тбилиси*). **О приближенном решении граничных задач теории аналитических функций.** Методом последовательных приближений решается граничная задача

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\,\Phi^{-}(t) + F(t). \qquad (1)$$

Граничное условие (1) выполняется вдоль замкнутой гладкой кривой L; $\Phi(z)$ — искомая кусочно-голоморфная матрица ($\Phi^{+}(t)$ и $\Phi^{-}(t)$ обозначают ее граничные значения соответственно изнутри и извне области, ограниченной линией L), а $G(t)$ и $F(t)$ — заданные на L матрицы, удовлетворяющие определенным условиям (см. [1]).

Сходимость процесса доказывается непосредственно, без использования существующей теории граничной задачи (1).

Лит.: 1. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946.

А. А. Меленцов (*Свердловск*). **К теории прообразований Хаусдорфа. I.** Преобразования, определяемые треугольными матрицами

$$\| C_{m,n} \| \quad \text{и} \quad \| C_{m,\,m-n} \| \qquad (C_{m,\,k} = 0 \text{ при } k > m \text{ и } k < 0),$$

мы будем называть союзными преобразованиями.

Теорема 1. Преобразование, союзное с преобразованием Хаусдорфа, является преобразованием Хаусдорфа ([1], стр. 309).

Теорема 2. Последовательности комплексных чисел, определяющие союзные преобразования Хаусдорфа, связаны между собой δ-преобразованием ([1], стр. 307).

Теорема 3. Комплексные функции $\chi(t)$ и $\chi^{*}(t)$, обладающие конечным изменением на отрезке [01] и определяющие союзные регулярные преобразования Хаусдорфа ([1], стр. 318), связаны соотношением

$$\chi^{*}(t) = \chi(1) - \chi(1-t).$$

II. Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{p_n\}$ такая, что $P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n \neq 0$ при всех значениях n. Союзные преобразования, определяемые треугольными матрицами

$$\left\| \frac{p_{m-n}}{P_m} \right\| \quad \text{и} \quad \left\| \frac{p_n}{P_m} \right\|, \quad n \leqslant m,$$

мы называем преобразованиями Вороного—Рисса.

Теорема 4. Пересечение класса преобразований Хаусдорфа с классом преобразований Вороного—Рисса совпадает с классом союзных преобразований Чезаро.

III. Пусть дан степенной ряд $F(z) = \sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} \gamma_{\lambda} z^{\lambda}$ и его степени в смысле Коши

$$[F(z)]^{\nu} = \sum_{\lambda=\nu}^{\infty} \gamma_{\lambda}^{(\nu)} z^{\lambda}.$$

Преобразование, определяемое треугольной матрицей

$$\| \varphi_n(m) - \varphi_{n+1}(m) \|, \quad \varphi_n(m) = \sum_{\lambda=n}^{m} \gamma_{\lambda}^{(\nu)}, \quad \varphi_n(m) = 0 \text{ при } n > m,$$

мы называем аналитическим преобразованием (см. [2], стр. 157).

Теорема 5. Пересечение класса преобразований Хаусдорфа с классом аналитических преобразований совпадает с классом преобразований Эйлера ([1] стр. 227).

Лит.: 1. Харди Г., Расходящиеся ряды, М., 1951. 2. Perron O., Math. Zeitschr. 18, (1923), 157—172.

И. М. Мельник (*Ростов на Дону*). **Поведение интеграла типа Коши в точках разрыва плотности и исключительные случаи краевой задачи Римана.** В первой части работы производится исследование интеграла типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau$$

в окрестности тех точек c контура L, где плотность интеграла $\varphi(\tau)$, удовлетворяющая, вообще говоря, условию Гельдера, имеет особенности одного из следующих видов:

$$1)\ \ \varphi(\tau)=\varphi^*(\tau)\ln^p(\tau-c);$$

$$2)\ \ \varphi(\tau)=\frac{\varphi^*(\tau)\ln^p(\tau-c)}{(\tau-c)^\gamma}$$

(p — целое положительное число),

$$3)\ \ \varphi(\tau)=\varphi^*(\tau)\ln\ln(\tau-c),$$

где $\varphi^*(\tau)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера. Во всех перечисленных случаях находится главная часть разложения функции $\Phi(z)$ в окрестности исследуемой точки.

Рассматриваются случаи, когда c является концевой или внутренней точкой контура.

Во второй части полученные результаты используются для исследования решения краевой задачи Римана:

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t)$$

в тех случаях, когда коэффициент $G(t)$ имеет особенности следующего вида:

$$1)\ \ G(t)=G^*(t)\,(t-c)^r,$$

$$2)\ \ G(t)=G^*(t)\ln^r(t-c),$$

где c — концевая точка контура, r — вещественное число.

Дается полное исследование характера решения в окрестности указанных точек, а также влияния членов $(t-c)^r$, $\ln^r(t-c)$ на число решений и условий разрешимости задачи.

Д. Е. Меньшов (*Москва*). **О пределах подпоследовательности частных сумм тригонометрических рядов.** Как известно, различные подпоследовательности частных сумм $S_n(x)$, $n=0, 1, 2, \ldots$, тригонометрического ряда

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1)$$

могут сходиться почти всюду к различным пределам. Возьмем какое-нибудь измеримое множество $E\subset[-\pi, \pi]$, имеющее положительную меру, и какой-нибудь тригонометрический ряд (1). Возникает вопрос, каким условиям удовлетворяет множество всех функций, каждая из которых является пределом почти всюду на E некоторой подпоследовательности частных сумм ряда (1). Любую из таких функций мы будем называть предельной функцией ряда (1) на множестве E.

Возьмем какое-нибудь множество $M=\{\varphi(x)\}$ измеримых функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на E. Мы будем называть функцию $f(x)$, определенную почти всюду на том же множестве, предельной функцией множества M в смысле сходимости почти всюду на E, если можно определить последовательность функций $\varphi_m(x)\in M$, $m=1, 2, \ldots$, которая сходится с $f(x)$ почти всюду на E.

Множество M мы будем называть замкнутым в смысле сходимости почти всюду на E, если оно содержит все свои предельные функции.

В этих определениях функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ могут принимать бесконечные значения определенного знака на множествах положительной меры.

Можно доказать следующую теорему.

Пусть E есть какое-нибудь измеримое множество, лежащее на $[-\pi, \pi]$. Для того чтобы множество $M = \{\varphi(x)\}$ измеримых функций $\varphi(x)$, определенных почти всюду на E, было множеством всех предельных функций на E некоторого тригонометрического ряда, необходимо и достаточно, чтобы множество M было замкнутым в смысле сходимости почти всюду на E.

При этом любое множество M, обладающее предыдущим свойством, всегда является множеством всех предельных функций на E некоторого тригонометрического ряда с коэффициентами, стремящимися к нулю при $n \to \infty$.

Можно также доказать теоремы, позволяющие определять тригонометрические ряды по заданным пределам неопределенности по мере и по заданному множеству предельных функций, если на это последнее множество налагать некоторые ограничения.

С. Н. Мергелян (*Москва*). **Проблема наилучшей мажоранты.** Во многих вопросах теории приближений наблюдается тесная связь между полнотой системы аналитических функций и компактностью этой системы на соответствующих множествах. Эта связь приводит к постановке общей задачи о нахождении наилучшей мажоранты.

Задача заключается в том, что требуется определить или оценить функцию $M(z) \equiv \sup |f(z)|$, где верхняя грань берется в некотором классе аналитических в G функций, удовлетворяющих условию $\|f\| \leqslant 1$ при различном определении нормы и множества G:

$$\left(\|f\| = \sup h(z)\,|f(z)|, \qquad \|f\| = \iint h(z)\,|f(z)|^2\,ds, \text{ и т. д.}\right).$$

В докладе приведено решение проблемы наилучшей мажоранты для ряда конкретных постановок, установлена связь с вопросами теории приближений.

Г. М. Миракьян (*Одесса*). **О приближениях с помощью выражений, содержащих цилиндрические функции.** В качестве ядра аппроксимационной формулы берется цилиндрическая функция

$$I_0(x) = 1 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \ldots + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n!)^2} + \ldots$$

и вводится последовательность чисел

$$\Delta_n = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{[I_0(u)]^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Последовательность аппроксимирующих функций определяется равенством

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\Delta_n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\,\frac{du}{[I_0(u)]^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна в $(-\infty, +\infty)$, то имеет место равномерная сходимость последовательности функций $\Phi_n(x)$ при $n \to \infty$ к функции $f(x)$ в каждом сегменте конечной длины.

Если функция дважды дифференцируема, то

$$\lim_{n\to\infty} n\,[\Phi_n(x) - f(x)] = f''(x)\ [f''(x) \neq 0]. \qquad (*)$$

Последний результат аналогичен результату Е. В. Вороновской [1], установленному для аппроксимационных полиномов С. Н. Бернштейна.

Полагая

$$C_{2k}=\frac{1}{\Delta_n}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{u^{2k}du}{[I_0(u)]^n}\qquad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

можно установить более общее предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} n^m\left[\Phi_n(x)-f(x)-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{C_{2k}f^{(2k)}(x)}{(2k)!}\right]=\frac{f^{(2m)}(x)}{(2x)!}\ [f^{(2m)}(x)\neq 0],$$

при $m=1$ получается (*).

Лит.: 1. Вороновская Е. В., ДАН СССР, № 4 (1932), 79—85.

А. Д. Мышкис (*Минск*), **Э. И. Вигант** (*Рига*), **А. Я. Лепин** (*Минск*). **Несобственные интегралы в n-мерном пространстве.** Теория несобственных интегралов для функций $n\geqslant 2$ переменных почти не разработана; встречаются лишь отдельные примеры применения таких интегралов. Это объясняется существенным отличием n-мерного случая от одномерного. Так, если функция f задана на n-мерной области G и суммируема по каждой компактной части G и если существует предел интеграла от f по таким частям (с как угодно гладкой границей) при произвольной аппроксимации G, то f суммируема по G. Поэтому, если желать, чтобы класс несобственно интегрируемых функций был шире класса суммируемых функций, необходимо ограничить способы аппроксимации G.

Принимается следующее определение несобственного интеграла. Пусть задан класс $\mathcal{P}=\{\Pi_\alpha\}$ последовательностей Π_α ограниченных измеримых множеств $P_{\alpha,i}\,(i=1,\ 2,\ \ldots)$; $\overline{P}_{\alpha,i}\subset G$; при этом для любого компактного множества $F\subset G$ при $i>i_0(F,\ \alpha)$ будет $F\subseteq P_{\alpha,\,i}$. Функция f называется интегрируемой по G относительно класса $\mathcal{P}$, если существует (конечный) не зависящий от α предел $\lim\limits_{i\to\infty}\int\limits_{P_{\alpha,\,i}} f dP$ (несобственный интеграл).

Специфика n-мерного случая состоит в том, что, в отличие от одномерного случая, здесь нет способа несобственного интегрирования (т. е. выбора класса $\mathcal{P}$), который можно было бы считать наиболее естественным; поэтому различные способы несобственного интегрирования нужно рассматривать как равноправные.

Исследован ряд основных свойств несобственных интегралов, хотя многие проблемы здесь еще ожидают решения. Решен вопрос об эквивалентности (при естественном определении этого понятия) двух способов несобственного интегрирования, определяемых классами $\mathcal{P}'$ и $\mathcal{P}''$, каждый из которых состоит из единственной последовательности: $\mathcal{P}'=\{P'_i\}$, $\mathcal{P}''=\{P''_i\}$. Для этого выделяется последовательность попарно не пересекающихся множеств $M_i\subset G$ положительной меры так, что, с точностью до множеств меры 0,

$$G=\bigcup_{j=1}^{\infty}M_j,\quad P'_i=\bigcup_{j=1}^{\infty}\alpha'_{ij}M_j,\quad P''_i=\bigcup_{j=1}^{\infty}\alpha''_{ij}M_j\quad (i=1,\ 2,\ \ldots),$$

где коэффициенты α_{ij} равны 0 или 1 и указывают на отсутствие или наличие соответствующего слагаемого; при этом для фиксированного i почти все α_{ij} равны 0, а для фиксированного j почти все α_{ij} равны 1. Пусть каждая из систем линейных форм $\{S'_i\}=\left\{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha'_{ij}x_j\right\}$ и $\{S''_i\}=\left\{\sum\limits_{j=1}^{\infty}\alpha''_{ij}x_j\right\}$ линейно независимая. Тогда необходимое и достаточное условие эквивалентности таково: существует натуральное p, для которого при любом i возможны представления

$$S'_i=\sum_{j=1}^{p}\delta'_{ij}S'_j+\sum_{j=1}^{\infty}\gamma'_{ij}S''_j,\quad S''_i=\sum_{j=1}^{p}\delta''_{ij}S''_j+\sum_{j=1}^{\infty}\gamma''_{ij}S'_j,$$

причем для каждого i почти все γ_{ij} равны 0 и, кроме того,

$$|\gamma'_{ij}|+|\gamma''_{ij}|\xrightarrow[i\to\infty]{}0\quad(j=1,2,\ldots),$$

$$\sup_i\left[\sum_{j=1}^{p}(|\delta'_{ij}|+|\delta''_{ij}|)+\sum_{j=1}^{\infty}(|\gamma'_{ij}|+|\gamma''_{ij}|)\right]<\infty.$$

Получены и некоторые иные результаты в этом направлении.

В качестве примера применения понятия несобственного интеграла рассматриваются формулы Грина, например формула

$$\int\limits_G \Delta u dG=-\int\limits_S\frac{\partial u}{\partial n}dS$$

для конечной области G с гладкой границей S. Для функции u, непрерывно дифференцируемой вплоть до S и имеющей вторые непрерывные производные в G (эти предположения естественны в теории краевых задач), формула сохраняет силу, если интеграл в ее левой части понимать как несобственный при аппроксимации S с помощью поверхностей, в некотором обобщенном смысле параллельных S. Формула сохраняет силу и для «почти гладкой» поверхности S, т. е. поверхности, на которой указано замкнутое «сингулярное» подмножество S_s, причем существует последовательность областей G_i, ограниченных гладкими поверхностями S_i, для которых $G_1\subseteq G_2\subseteq\ldots\subseteq G$, $\overline{G}_i=\cap\, S_s\Lambda$, площ. $(\overline{S_i\setminus S})\to 0$ при $i\to\infty$ и каждое замкнутое множество $F\subset\overline{G}\setminus S_s$ содержится почти во всех $\overline{G}_i$.

Понятие несобственного интегрирования связано и с регуляризацией расходящихся интегралов в теории обобщенных функций.

И. П. Натансон (*Ленинград*). **Обобщение теоремы П. И. Романовского о сингулярных интегралах на случай интегралов Стильтьеса.** Пусть положительное ядро $\Phi_n(t, x)$ $(a\leqslant t\leqslant b,\ a<x<b)$ сингулярного интеграла при постоянных n и x возрастает в промежутке $[a, x]$ и убывает в промежутке $[x, b]$. Пусть $F(t)$ ограничена и при некотором x и всех n существует интеграл

$$I_n=\int\limits_a^b\Phi_n(t, x)\,dF(t).$$

Если при упомянутом x существует конечная $F'(x)$, то она является пределом интеграла I_n при $n\to\infty$. Известная теорема П. И. Романовского получается отсюда при абсолютно непрерывной $F(t)$.

Г. И. Натансон (*Ленинград*). **Некоторые вопросы приближения функций функциями Штурма—Лиувилля.** Дана задача Штурма—Лиувилля

$$\begin{cases}\dfrac{d^2U}{dx}+[\lambda^2-B(x)]\,U=0,\\ U'(0)-hU(0)=0,\\ U'(\pi)+HU(\pi)=0.\end{cases}$$

Как известно, существует последовательность $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ собственных функций этой задачи.

Рассматриваются равномерные приближения различных функций при помощи функций $\varphi_k(x)$.

1) Доказаны аналоги теорем Д. Джексона. В частности, установлена следующая

Теорема. Если $B(x)$ непрерывна на $[0, \pi]$, то для любой функции $f(x)$, непрерывной на $(0, \pi)$, будет

$$\inf_{l_k} \max_{[0,\pi]} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x) \right| \leqslant A \left[\omega\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \max_{[0,\pi]} |f(x)| \right],$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$, а константа A зависит лишь от $B(x)$, h и H.

2) Доказаны обратные теоремы (аналоги теорем С. Н. Бернштейна).

3) Доказан соответствующий аналог теоремы А. Зигмунда.

4) Строится интерполяционный оператор

$$L_n^{SL}[f; x] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_n(x)}{(x - x_k^n)\, \varphi_n'(x_k^n)} f(x_k^n),$$

где x_k^n — корни функции $\varphi_n(x)$, и находятся оценки для разности

$$f(x) - L_n^{SL}[f; x].$$

5) В теорию рядов Фурье по функциям Штурма—Лиувилля переносится метод суммирования Бернштейна—Рогозинского.

И. П. Натансон (*Ленинград*). **Добавление к теоремам Хаусдорфа о моментных последовательностях.** Пусть дана последовательность $\mu_m, \mu_{m+1}, \mu_{m+2}, \ldots$ Тогда

I. Если существует такая постоянная C, что при обычных обозначениях

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i C_r^i \mu_{i+k} = \Delta^r_{\mu_k}$$

оказывается

$$\sum_{k=m}^{n} C_n^k \left| \Delta^{n-k}_{\mu_k} \right| < C \quad (n = m, m+1, \ldots), \tag{1}$$

то существует такая функция $g(x)$ с конечным изменением, что

$$\int_0^1 x^k dg(x) = \mu_k \quad (k = m, m+1, \ldots). \tag{2}$$

При этом, если $m > 0$, интеграл μ_0 может иметь произвольное значение, а (если $m > 1$) интегралы $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{m-1}$ определяются однозначно.

II. Если, сверх условия (1), известно, что

$$\Delta^r_{\mu_k} \geqslant 0 \quad (k = m, m+1, \ldots;\ r = 0, 1, \ldots),$$

то среди функций $g(x)$, удовлетворяющих соотношениям (2), имеются возрастающие.

III. Если существует такая постоянная C, что при некотором $p > 1$ оказывается

$$(n+1)^{p-1} \sum_{k=m}^{n} \left| C_n^k \Delta^{n-k}_{\mu_k} \right|^p < C \quad (n = m, m+1, \ldots),$$

то существует единственная функция $\varphi(x)$, входящая в L_p и удовлетворяющая соотношениям

$$\int_0^1 x^k \varphi(x)\, dx = \mu_k \quad (k = m, m+1, \ldots). \tag{3}$$

IV. Если существует такая постоянная C, что

$$(n+1)\, C_n^k \left| \Delta_{\mu_k}^{n-k} \right| < C \qquad (n = m,\ m+1,\ \ldots;\ m \leqslant k \leqslant n),$$

то существует единственная измеримая и ограниченная функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая соотношениям (3).

При $m=0$ — это известные теоремы Ф. Хаусдорфа.

И. И. Огиевецкий (*Днепропетровск*). **К теории суммирования кратных числовых рядов.** 1. Исследуется ограниченная суммируемость (см. [1]) двойных рядов методами Чезаро $(C_\lambda, \alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) > -1$ и Абеля (A_λ). Показывается, что если ряд ограничен (C, α, β) и суммируем $(C_\lambda, \alpha, \beta)$ к s, то он также суммируем A_λ к s. Аналогичный результат устанавливается для одного класса двойных рядов с неограниченными чезаровскими средними. Для суммирования двойных рядов методом Чезаро в ограниченном смысле доказаны свойства выпуклости и включения.

2. Для методов суммирования с расщепляющимися ядрами устанавливаются тауберовы теоремы винеровского типа. Рассматривается применение этих теорем к конкретным методам суммирования двойных рядов и интегралов, в частности устанавливаются непрерывные аналоги теорем из работы [2].

Лит.: 1. Moore C. N., Summable series and convergance, Нью-Йорк, 1938. 2. Огиевецкий И. И., ДАН СССР 95 (1954), 713.

И. Е. Огиевецкий (*Днепропетровск*). **Некоторые тауберовы теоремы об ограниченно медленно колеблющихся последовательностях.** При использовании введенного автором понятия об ограниченном медленном колебании двойной последовательности известная теорема Андерсена [1] (стр. 80) распространяется на двойные последовательности.

Справедливо следующее предложение.

Пусть для ряда $\sum\limits_{\mu,\nu=0}^{\infty} u_{\mu,\nu}$ при некоторых $\gamma > 0$ и $\delta > 0$, удовлетворяющих неравенству $\gamma^\delta \leqslant (\alpha+1)(\beta+1)$, где $(\alpha, \beta) > -1$, выполняются условия

$$\sigma_{m,n}^{\alpha,\beta} = \begin{cases} o(n^\delta) & \text{при любом фиксированном } m, \\ o(m^\gamma) & \text{при любом фиксированном } n, \\ o(1) & \text{для } (m, n) > N \geqslant 0. \end{cases}$$

Пусть, далее, $\sum\limits_{\mu,\nu=0}^{\infty} u_{\mu,\nu}$ ограниченно суммируем методом Абеля к числу S. Тогда этот ряд ограниченно суммируем $(c, \alpha+\delta_1, \beta+\delta_2)$, где $(\delta_1, \delta_2) > 0$, к этому же числу, если m и n, стремясь к ∞, удовлетворяют неравенству

$$\lambda n^{\frac{\delta}{\alpha+1}} < m < \lambda^{-1} n^{\frac{\beta+1}{\gamma}},$$

а x и y, стремясь к 1, при любом λ удовлетворяют неравенству

$$\lambda (1-y)^{\frac{\beta+1}{\gamma}} < 1-x < \lambda^{-1} (1-y)^{\frac{\delta}{\alpha+1}},$$

где $0 < \lambda < 1$.

Аналогичные результаты устанавливаются для ограниченно медленно колеблющихся двойных последовательностей, ограниченно суммируемых методом Чезаро. Указанные предложения, в частности, обобщают и усиливают некоторые теоремы из работ [2] и [3].

Лит.: 1. Andersen A., Studier over Cesazós Sennmabilitätsmethode. Copenhagen, 1921. 2. Knopp K., Mathem. Zeitschr., B. 45 (1939). 3. Огиевецкий И. Е., ДАН СССР 92, № 2 (1953).

В. К. Паулаускас (*Вильнюс*). **О приближениях функций вместе с их производными.** В случае квадратического приближения данной функции вместе с ее производными до порядка α в интервале (a, b) ищется минимум суммы интегралов от взвешенных квадратов разностей обобщенного полинома $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k u_k(x)$ или его производных и данной функции или ее производных. Доказывается единственность решения.

Рассматривается случай, когда все $u_k(x)$ удовлетворяют уравнению (λ — неопределенный параметр)

$$A(x)\frac{d^2u_k}{dx^2} + B(x)\frac{du_k}{dx} + C(x)u_k = \lambda u_k,$$

$$A'''(x) \equiv B''(x) \equiv C'(x) \equiv 0, \qquad A(x) > 0 \qquad (a < x < b),$$

которое приводим к самосопряженному виду

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du_k}{dx}\right] + q(x)u_k = \lambda r(x)u_k,$$

и краевым условиям, из которых должно вытекать или

1) $u_k^{(j)}(x)$ $(j = 0, 1, \ldots, \alpha - 1)$ конечные при $x = a$, $x = b$ $p(a) = p(b) = 0$, или

2) $u_k(x)$ — периодические с периодом $b - a$, $p(a) = p(b)$, $r(a) = r(b)$.

Доказывается ортогональность производных $u_k^{(j)}(x)$ с весом $p^j(x)/r^{j-1}(x)$ $(j = 0, 1, \ldots, \alpha)$ и совпадение полиномов рассматриваемого и обыкновенного [с весом $r(x)$] квадратических приближений. Примерами являются соответствующие приближения тригонометрическими полиномами, а также полиномами Лежандра, Чебышева, Лагерра и Эрмита.

Аналогично ставится задача о равномерных приближениях функции с ее производными. В комплексной области просто обобщается теорема А. Н. Колмогорова и ее доказательство.

Г. Н. Положий (*Киев*). **Интегрирование по сопряженным переменным.** Для изучения функций, определенных системами уравнений в частных производных, существенный интерес представляет построение всякого рода интегрирований, инвариантных по отношению к данному классу функций. В применении к одному частному случаю p-аналитических функций (см. [1]), а именно, когда p есть гармоническая функция от x, y, положительное решение этого вопроса дано в работе М. А. Лукомской [2] при помощи так называемого Σ-интегрирования, введенного Берсом и Гельбартом [3] и обобщенного А. И. Маркушевичем [4].

В настоящей работе при помощи введенного нами интегрирования по сопряженным переменным (см. [1], [5]) дается полное решение указанного вопроса для p-аналитических функций и некоторых других классов функций.

Теорема 1. Для того чтобы интеграл по сопряженным переменным произвольной p-аналитической функции $f(z) = u + iv$ был p'-аналитической функцией, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая аналитическая функция $\omega = \alpha + i\beta$, что $\sqrt{pp'}$ была бы функцией только от β, $\sqrt{\frac{p}{p'}}$ — функцией только от α. При выполнении этих условий сопряженные переменные имеют вид:

$$Z = \int \sqrt{\frac{p'}{p}}\,d\alpha + i\int\frac{d\beta}{\sqrt{pp'}}, \qquad \tilde{Z} = \int\sqrt{\frac{p}{p'}}\,d\alpha + i\int\sqrt{pp'}\,d\beta, \tag{1}$$

и интеграл по сопряженным переменным записывается в виде

$$F(z) = U + iV = \int\limits_{z_0}^{z} u\,d\tilde{Z} + iv\,dz \tag{2}$$

Функцию $f(z)=u+iv$ будем называть (p, q)-аналитической, если p и q являются непрерывно дифференцируемыми решениями линейной эллиптической системы уравнений

$$pu_x+qu_y-v_y=0, \quad -qu_x+pu_y+v_x=0. \tag{3}$$

Далее, $Z=X+iY$ и $\tilde{Z}=\tilde{X}+i\tilde{Y}$ будем называть сопряженными переменными (p, q)-аналитических функций, если $Z^*=X+i\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}^*=Y-i\tilde{X}$ суть $(p, -q)$-аналитические функции.

Теорема 2. Для того чтобы интеграл по сопряженным переменным произвольной (p, q)-аналитической функции $f(z)=u+iv$ был (p, q)-аналитической функцией, необходимо и достаточно, чтобы p и q были функциями только от какой-либо гармонической функции $\beta=\beta(x, y)$. При выполнении этих условий сопряженные переменные имеют вид:

$$Z=\alpha-\int\frac{q}{p}\,d\beta+i\int\frac{d\beta}{p}, \quad \tilde{Z}=\alpha+\int\frac{q}{p}\,d\beta+i\int\frac{d\beta}{p^*}, \tag{4}$$

где $p^*=\dfrac{p}{p^2+q^2}$, α — гармоническая функция такая, что $\alpha_x=\beta_y$, $\alpha_y=-\beta_x$, и интеграл по сопряженным переменным определяется равенством (2).

Функцию $f(z)=u+iv$ будем называть (p, q)-функцией, если u и v являются непрерывно дифференцируемыми решениями линейной гиперболической системы уравнений

$$pu_x+qu_y-v_y=0, \quad -qu_x-pu_y+v_x=0. \tag{5}$$

Функции $Z=X+iY$ и $\tilde{Z}=\tilde{X}+i\tilde{Y}$ будем называть сопряженными переменными (p, q)-функций, если $Z^*=X+i\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}^*=Y-i\tilde{X}$ являются $(p, -q)$-функциями.

Теорема 3. Для того чтобы интеграл по сопряженным переменным произвольной (p, q)-функции $f(z)=u+iv$ был (p, q)-функцией, необходимо и достаточно, чтобы p и q были функциями только от $\beta=\varphi(x-y)+\psi(x+y)$, где φ и ψ — произвольные функции своих аргументов. При выполнении этих условий сопряженные переменные имеют вид:

$$Z=\alpha-\int\frac{q}{p}\,d\beta+i\int\frac{d\beta}{p}, \quad \tilde{Z}=\alpha+\int\frac{q}{p}\,d\beta+i\int\frac{d\beta}{p^*}, \tag{6}$$

где $p^*=\dfrac{p}{q^2-p^2}$, α — функция, определенная из условий $\alpha_x=-\beta_y$, $\alpha_y=-\beta_x$. Интеграл по сопряженным переменным записывается в виде (2), где Z и $\tilde{Z}$ определены равенствами (6).

Лит.: 1. Положий Г. Н., ДАН СССР 58, № 7 (1947). 2. Лукомская М. А., Прикл. матем. и мех., № 6 (1955). 3. Bers L. and Gelbart A., Trans. Amer. Math. Soc., т. 56, № 1, 1944. 4. Петровский И. Г., Успехи матем. наук 1, в. 3—4 (1946). 5. Положий Г. Н., ДАН СССР 60, № 5 (1948).

Б. Н. Рахманов (*Саратов*). **О некоторых классах аналитических функций.** Пусть S_ρ — класс функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям:

а) функции

$$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$$

регулярны в $|z|<1$ и имеют в круге $|z|<1$ единственный простой нуль в точке $z=0$;

б) для каждой функции $f(z)$ существует такое положительное число $\delta=\delta(f)$, что для каждого r из интервала $1-\delta<r<1$, $z=re^{i\varphi}$ функция $\rho=|f(re^{i\varphi})|$ в интервале $(0, \pi)$ является невозрастающей, а в интервале $(\pi, 2\pi)$ — неубывающей функцией от φ.

Для функций этого класса устанавливаются структурные формулы, точные оценки коэффициентов разложения функций в степенной ряд, радиус звездообразности. Указываются возможные обобщения. Результаты переносятся и на другие аналогичные классы аналитических функций.

Е. Я. Ремез (*Киев*). **Некоторые вопросы, связанные с единственностью или множественностью решений чебышевской задачи для системы несовместных линейных уравнений.** Задача.

$$\max_{i=\overline{1,N}} |\Phi_i(x)| \equiv L(x) = \min \tag{1}$$

для системы несовместных уравнений

$$\Phi_i(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i = 0 \qquad (i = \overline{1, N}), \tag{2}$$

помимо своего очевидного значения для проблемы выравнивания эмпирических данных, может рассматриваться как одна из фундаментальных для проблемы разработки численных методов решения общих задач чебышевского приближения на основе применения соответствующих интерполяционных «сеточных» подходов.

При общей трактовке задачи (1)—(2) в теоретическом и практическом плане наиболее существенным осложняющим моментом является возможная (континуально-бесконечная) многозначность решения. С последнею приходится по необходимости считаться, поскольку известное, сильно упрощающее задачу, детерминантное условие Хаара—Валле Пуссена (отличия от нуля всех определителей порядка n матрицы $\| a_{ij} \|$) здесь, вообще говоря, отнюдь не может предполагаться обеспеченным: оно нарушается даже при рассмотрении задачи (1)—(2) хотя бы в плане сеточного решения наиболее классических случаев задачи чебышевского приближения для функций двух или нескольких переменных.

Еще в монографии автора (1935 г.) были установлены точные аналоги фундаментальной теоремы Чебышева—Маркова для задачи (1)—(2), как и для более общих задач равномерного приближения, тесно связанные с понятием неприводимой чебышевской подсистемы. Эти результаты, в частности, давали необходимую основу для общей трактовки задачи (1)—(2).

Настоящий доклад посвящен некоторым новым результатам недавних исследований автора по данному кругу вопросов.

I. Разумея под *Т-уравнением* любое из уравнений несовместной системы (2), входящее в какую-нибудь из ее неприводимых чебышевских подсистем (в геометрической трактовке T-уравнениям соответствуют *чебышевские точки уклонения*), и под наибольшей чебышевской подсистемой (н. ч. п.) — соединение всех *неприводимых чебышевских подсистем* или, что то же, совокупность всех T-уравнений системы (2), мы получаем, при учете р а н г а н. ч. п., полный ответ на совокупность принципиальных вопросов, относящихся к установлению факта единственности или множественности решений задачи (1)—(2) и к установлению структуры множества всех ее решений. Практически, однако, основная трудность здесь будет заключаться, прежде всего, в выделении из заданной системы (2) ее н. ч. п.

II. Подходя к той же проблеме под углом зрения ближайшего учета, а именно, аспектов практического решения рассматриваемых вопросов, мы теперь предположим, что для заданной чебышевской задачи типа (1)—(2) нами уже найдено каким-нибудь путем о д н о ч а с т н о е р е ш е н и е $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$; это может быть сделано с помощью одного из разработанных для этой цели итерационных методов, например метода последовательных взвешенных квадратических приближений или метода уравнительных спусков, или метода превалирующих уклонений.

Пусть $\{i_\nu\}$ $(\nu = 1, \overline{N'})$ — набор номеров тех уравнений системы (2), для которых абсолютное уклонение $|\Phi_i(x^*)|$ достигает своего максимума (равного ρ). В таком случае н. ч. п. для всей системы (2) точно совпадает с н. ч. п. указанной подсистемы N' уравнений. Последняя обычно невелика по своему составу, и отыскание ее н. ч. п. выполняется уже достаточно просто. Пусть q обозначает ранг матрицы $\| a_{i_\nu j} \|$. Равенство $q=n$ оказывается д о с т а т о ч н ы м и в т о ж е в р е м я н е о б х о д и м ы м условием е д и н с т в е н н о с т и решения задачи (1)—(2). Если же $q<n$, то совокупность $\mathfrak{E}_0 \equiv \{x^{(0)}\}$ в с е х решений геометрически представляется $(n-q)$-мерным выпуклым многогранником в R_n. В случае $n - q = 1$ (который на практике должен, повидимому, после случая $q = n$, встречаться чаще других) фактическое

определение полной совокупности $\{x^{(0)}\}$ может быть теперь крайне просто и удобно выполнено, например, графо-аналитическим методом автора. При $n-q \geqslant 2$ нахождение всей совокупности $\{x^{(0)}\}$ сводится, вообще, к решению системы линейных неравенств с $(n-q)$ неизвестными, для выполнения которого могут быть применены численный метод последовательных исключений (восходящий к Фурье) или же параметрический метод крайних точек (примыкающий к общим идеям Минковского).

III. Поскольку при $n-q>2$ техническая сложность и громоздкость решения последней системы неравенств, вообще, быстро нарастает вместе с величиной $n-q$, представляется естественным учесть то соображение, что с точки зрения практики здесь представляет основной интерес, вообще говоря, не столько нахождение совокупности всех чебышевских решений $x^{(0)}$, сколько выделение из этой совокупности того решения, которое могло бы быть признано в некотором (более дифференцированном) смысле наилучшим. Уточняя такую постановку вопроса, естественно дополнительно потребовать минимизации модуль-максимума уклонения $\Phi_i(x)$ для совокупности уравнений системы (2), не входящих в ее н. ч. п. Это приводит к аналогичной дополнительной чебышевской задаче (д. ч. з.) уже с $n-q$ неизвестными — параметрами, для которой найдем какое-нибудь частное решение. Если бы при этом обнаружилось, что и указанная д. ч. з. имеет многозначное решение, мы аналогично сведем вопрос к решению еще одной д. ч. з. уже с $(n-q-q_1)$ параметрами и т. д. Мы неизбежно придем к равенству $n-q-q_1-\ldots-q_r=0$, и это будет означать, что для последней д. ч. з. найденное решение является единственным. Возвращаясь к неизвестным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получим *нормальное чебышевское решение* для первоначальной задачи (1)—(2). Применяя векторную трактовку задачи (1)—(2), убеждаемся, что единственность определяемого таким путем «нормального решения» имеет характер абсолютный: оно не зависит от выбора частного решения и параметров на последовательных этапах указанного «ступенчатого» процесса чебышевского приближения.

П. И. Романовский (*Москва*). **Об интегральных преобразованиях, сходных с преобразованием Лапласа.** Изучаются интегральные преобразования

$$F(s)=\int_0^{+\infty} f(x)\,k(xs)\,dx,$$

где $k(s)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} s>0$; $\lambda(\sigma)=\sup\limits_{\operatorname{Re} s\geqslant\sigma}|k(s)|<+\infty$ при $\sigma>0$; $f(x)\lambda(\sigma x)\in L(0,+\infty)$ при некотором $\sigma>0$ (при $k(s)=e^{-s}$ получается обычное преобразование Лапласа). Отмечаются свойства этих преобразований, в частности необходимые и достаточные условия для $f(x)$, при которых $F(s)$ представима в виде $\sum\frac{a_n}{s^{\nu_n}}$, где $\nu_n>0$, $\sum\mu^{\nu_n}<+\infty$ при некотором $\mu<1$. В формулировке этих условий играют роль моменты функций $k(x)$ и $\lambda(x)$ на $(0,+\infty)$.

Б. А. Рымаренко (*Ленинград*). **Некоторые экстремальные задачи теории монотонных функций.** 1. Рассматриваются полиномы заданной степени, монотонные в конечном промежутке или на всей вещественной оси, коэффициенты которых подчинены нескольким линейным связям. Устанавливается, что при некоторых ограничениях относительно связей всегда найдется экстремальный полином, производная которого равна точному квадрату некоторого другого полинома, если число связей равно: 1) одной — для конечного промежутка и 2) двум — для всей вещественной оси (для конечного промежутка производная экстремального полинома может быть равна квадрату другого полинома с некоторым неотрицательным «весом»).

2. Аналогичные утверждения справедливы для кратно-монотонных полиномов и для функций вида

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x} e^{-x^2}P(x)\,dx,\quad \varphi(x)=\int_0^x e^{-x}P(x)\,dx \text{ и др.}$$

($\{P(x)\}$ — некоторые полиномы заданной степени, неотрицательные в соответствующих промежутках).

3. Указанные представления экстремальных полиномов (функций) применяются для решения различных частных экстремальных задач типа задач С. Н. Бернштейна.

4. Даются примеры, для которых указанные формы экстремальных полиномов (функций) не имеют места, если число связей более одной (для конечного промежутка) или двух (для всей вещественной оси).

Т. А. Сарымсаков (*Ташкент*). **Последовательности полиномов с регулярным распределением нулей.** Рассматривается последовательность

$$P_0(z),\quad P_1(z),\quad P_2(z),\ \ldots, \tag{1}$$

где $P_n(z)$ — полином степени n.

Определение. Последовательность (1) имеет регулярное распределение нулей, если для любого множества e существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(e)}{n}=\psi(e), \tag{2}$$

где $N_n(e)$ — число нулей полинома $P_n(z)$, принадлежащих множеству e.

Через ε обозначим производное множество от множества корней последовательности полиномов (1).

Относительно полиномов с регулярным распределением нулей в сообщении рассматриваются следующие задачи:

1) дать методы для определения множества ε и функции $\psi(e)$,

2) указать критерии для сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k P_k(z),$$

где a_k — заданные постоянные числа.

В предположении, что корни полиномов последовательности (1) вещественны, рассматриваются еще две задачи; однако в этом случае вместо предела (2) вводится в рассмотрение предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(-\infty,\ x)}{n}=\psi(x), \tag{3}$$

где $N_n(-\infty,\ x)$ обозначает число тех корней полинома $P_n(z)$, которые не превосходят x.

Пользуясь функцией $\psi(x)$, найти приближенные в совокупности значения корней полинома $P_n(z)$.

При этом, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое натуральное число n_0, что числа $z'_{i,n}$ $(i=\overline{1,\ n})$ удовлетворяют неравенствам

$$|z'_{i,n}-z_{i,n}|<\varepsilon \ \text{при}\ n\geqslant n_0 \ \text{и для всех}\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $z_{i,n}$ — корни полинома $P_n(z)$, то числа $z'_{i,n}$ называются приближенными в совокупности значениями корней $z_{i,n}$.

4) Даны две последовательности полиномов $\{P_n(z)\}$ и $\{Q_n(z)\}$ с регулярными распределениями нулей в интервале $(a,\ b)$.

Требуется указать условия, при выполнении которых совпали бы предельные распределения нулей обеих последовательностей полиномов.

Г. П. Сафронова (*Ленинград*). **Применение метрик Орлича к некоторым граничным задачам теории аналитических функций.** В. И. Смирновым была доказана следующая теорема: если регулярная внутри единичного круга функция $f(z)\in H_\delta$ и ее предельные значения $f(e^{i\theta})\in L_p$ при $p>\delta>0$, то $f(z)\in H_p$.

Целью доклада является обобщение этой теоремы на случай некоторых классов Орлича.

Пусть функция $M(u)$ определена в $[0, +\infty]$, неотрицательна там и $\overline{\lim\limits_{u\to+\infty}} M(u) = +\infty$. Будем говорить, что регулярная внутри единичного круга K функция $f(z)$ принадлежит классу H_M, если

$$\int\limits_0^{2\pi} M[\,|f(re^{i\theta})|\,]\,d\theta \leqslant H \quad (0 < r \leqslant 1).$$

Аналогично, функция $f(\theta) \in L_M[0, 2\pi]$, если

$$\int\limits_0^{2\pi} M[\,|f(\theta)|\,]\,d\theta < +\infty.$$

Теорема 1. Пусть $M(u)$ — выпуклая вниз, непрерывная при $u=0$ функция, $M(0)=0$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{M(u)}{u} = +\infty$. Тогда для того, чтобы гармоническая в круге функция $u(r, \theta)$ представлялась в виде

$$u(r, \theta) = \int\limits_0^{2\pi} u(\lambda)\,P(r, \lambda-\theta)\,d\lambda,$$

где $u(\lambda) \in L_M([0, 2\pi])$, а $P(r, \lambda-\theta)$ — ядро Пуассона, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_0^{2\pi} M[\,|u(r, \theta)|\,]\,d\theta \leqslant L \quad (0 \leqslant r < 1).$$

Теорема 2. Пусть $M(u)$, $N(u)$ — выпуклые, непрерывные при $u=0$ функции, $M(0)=N(0)=0$. Тогда, если $f(z) \in H_M$, $f(e^{i\theta}) \in L_N([0, 2\pi])$, то $f(z) \in H_N$.

Теорема 3. Пусть функции $\frac{M(u)}{u}$, $\frac{N(u)}{u}$ не убывают при $u \geqslant 0$ и $N(u)$ удовлетворяют неравенству

$$N(2u) \leqslant KN(u) \tag{1}$$

при $u \geqslant u_0$. Тогда имеет место заключение теоремы 2.

Пусть функция $M(u)$ строго возрастает, удовлетворяет неравенству (1) при всех u, и существует функция $\varphi(z)$, аналитическая на всей комплексной плоскости, кроме, может быть, $z=0$, и такая, что $|\varphi(z)| = M(|z|)$. Тогда заключение теоремы 2 остается в силе, если выполнено хотя бы одно из трех условий:

1) функция $N[M^{-1}(u)]$ выпуклая при $u \geqslant u_0$;

2) $\frac{M(u)}{u}$ возрастает, $\frac{N(u)}{u}$ убывает, $N(u)$ удовлетворяет неравенству (1) при $u \geqslant u_0$;

3) функции $N(u)$, $M^{-1}(u)$ удовлетворяют неравенству (1) при $u \geqslant u_0$ и отношение $\frac{M(u)}{N(u)}$ монотонно.

А. И. Селезнев (*Горький*). **О функциях, моногенных на нигде не плотных замкнутых множествах и множествах типа F_σ.** В работе устанавливается связь между структурой некоторых замкнутых множеств и множеств типа F_σ точек плоскости z и свойствами моногенных на них (т. е. имеющих конечную производную) функций.

Пусть смежные для связного замкнутого (совершенного) множества F точек плоскости z области G_k $(k=0, 1, 2, \ldots;\ z=\infty \in G_0)$ ограничены замкнутыми жордановыми спрямляемыми кривыми γ_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$, причем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \text{дл. } \gamma_k < \infty. \tag{1}$$

Примем за положительные направления обхода кривых γ_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$ такие направления обхода, при которых точки области G_k остаются с правой стороны от движущейся по кривой γ_k точки.

Допустим, что для любой точки $z \in F$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\tau_{\delta, z}}{\delta} = \tau_z < \infty, \tag{2}$$

где $\tau_{\delta, z}$ — сумма длин кривых γ_k или их частей, принадлежащих замкнутому кругу радиуса δ с центром в точке z.

Тогда для любой моногенной на F функции $f(z)$:

$$1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\gamma_k} f(\xi)\, d\xi = 0, \tag{3}$$

2) в точках z множества F, не лежащих на кривых γ_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} \tag{4}$$

имеет последовательность частичных сумм, сходящуюся к $f(z)$;

3) при условии

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\text{дл. } \gamma_k)^{\frac{2}{2m+3}} < \infty \qquad (m=0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

функция $f(z)$ имеет почти всюду на F производные до m-го порядка включительно $[f^{(0)}(z) = f(z)]$, причем

$$f^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m!}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\xi)\, d\xi}{(\xi - z)^{m+1}}\,; \tag{6}$$

4) если условие (5) выполнено при любом m $(m=0, 1, 2, 3\ldots)$ и

$$\frac{\text{дл. } \gamma_k}{\rho_{k, z_0}} \leqslant \varphi(k), \tag{7}$$

где ρ_{k, z_0} — расстояние точки z_0 до кривой γ_k, а $\varphi(k)$ — достаточно быстро стремящаяся к нулю при $k \to \infty$ функция, то имеет место разложение

$$f(z) = \lim_{k \to \infty} \left[\sum_{\nu=0}^{m_k} \theta_\nu \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu + \sum_{\nu=0}^{n_k} (1 - \theta_\nu) \frac{f^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} (z - z_0)^\nu \right] \tag{8}$$

почти всюду на звезде $M_{z_0}^{(F)}$, где $M_{z_0}^{(F)}$ — множества точек z, принадлежащих F вместе с отрезком $z_0 z$, не имеющим общих точек с кривыми γ_k $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Из разложения (8) устанавливаются для моногенных на множестве F функций теоремы единственности, а также теоремы, аналогичные теоремам Островского о сверхсходимости и теоремам о степенных рядах, не продолжимых за окружности их кругов сходимости.

Из свойств функций, моногенных на замкнутых множествах F, вытекают аналогичные свойства функций, моногенных на множествах типа F_σ (в частности, свойства моногенных функций Бореля).

Отсюда получаются также некоторые свойства функций, представимых равномерно сходящимися рядами рациональных функций.

Б. С. Содномов (*Улан-Удэ*). **Непротиворечивость проективности некоторых замечательных множеств.** Арифметической суммой двух множеств E_1 и E_2, расположенных на действительной прямой, называется множество всех чисел x_1+x_2, где $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$.

В этой работе изучается роль арифметического сложения множеств в образовании неизмеримых по Лебегу множеств. Доказано, что в минимальном семействе множеств, содержащем все замкнутые множества и инвариантном относительно конечного пересечения, разности и арифметического сложения, непротиворечиво существование неизмеримого по Лебегу множества. Для этого сначала доказывается, что арифметическое сложение в сочетании со счетным суммированием и взятием дополнения множества дает проективные множества сколь угодно высоких классов.

Наконец, показана непротиворечивость проективности некоторых замечательных множеств и дана верхняя оценка их классов. В числе таких множеств рассмотрены неизмеримое множество, данное Ван дер Варденом, множества, осуществляющие хаусдорфовское разбиение сферы, множество Лузина, которое измеримо, но не обладает свойством Бэра, множество Серпинского, все B-подмножества которого являются на нем G_δ.

И. Г. Соколов (*Львов*). **Остаточный член ряда Фурье дифференцируемых функций.** Дается оценка сверху остаточного члена для класса r раз дифференцируемых функций с ограниченной r-й производной. Результаты опубликованы в ДАН СССР, т. 103, № 1 (1955).

И. Д. Софронов (*Москва*). **К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений.** Рассмотрим линейное сингулярное интегральное уравнение с ядром Гильберта:

$$a(x)\,\varphi(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n(t, x)\,\varphi(t)\operatorname{ctg}\frac{t-x}{2}\,dt = f(x), \tag{1}$$

где $a(x)$, $n(t, x)$, $f(x)$ — функции, непрерывные в смысле Гельдера с показателем $\alpha\ (0 < \alpha \leqslant 1)$, т. е. для них справедливо неравенство

$$|\psi(t+\Delta t,\ x+\Delta x) - \psi(t, x)| \leqslant A\,(|\Delta t|^\alpha + |\Delta x|^\alpha).$$

К уравнению вида (1) может быть сведено решение довольно широкого круга задач теории функций комплексного переменного и математической физики.

Ниже предлагаются два способа получения приближенного решения уравнения вида (1) в случае, когда существует и единственно точное решение $\varphi(x)$ при любой правой части $f(x)$, удовлетворяющей условию Гельдера.

По коэффициентам уравнения (1) строится система линейных алгебраических уравнений

$$a_i\tilde{\varphi}_i + \sum_{k=0}^{n-1} a_{ik}\tilde{\varphi}_k = f_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{2}$$

где введены обозначения:

$$h = \frac{2\pi}{n}, \qquad x_i = i\cdot h, \qquad a_i = a(x_i), \qquad f_i = f(x_i),$$

$$a_{ik} = \frac{1}{2\pi}\int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} n(t, x_i)\operatorname{ctg}\frac{t-x_i}{2}\,\eta_k(t)\,dt, \qquad \eta_k(t) = \begin{cases} \dfrac{t-x_{k-1}}{h}, & t \leqslant x_k \\[2mm] \dfrac{x_{k+1}-t}{h}, & t \geqslant x_k. \end{cases}$$

При $k = i$ берется главное значение интеграла.

Относительно системы (2) доказывается, что для $n > n_0$ определитель отличен от нуля и ее решение $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_{n-1})$ близко к решению φ точного уравнения в следующем смысле:

$$\left\| p_0^{-1}\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} \right\|_\gamma \leqslant M \cdot h^{\alpha-\gamma-\varepsilon}. \tag{3}$$

Здесь $p_0^{-1}\tilde{\varphi}$ означает полигон (кусочно-линейную функцию), проходящий через точки:

$$(0, \tilde{\varphi}_0),\ (h, \tilde{\varphi}_1),\ (2h, \tilde{\varphi}_2), \ldots, (2\pi - h, \tilde{\varphi}_{n-1}),\ (2\pi, \tilde{\varphi}_0),$$

а

$$\| r(x) \|_\gamma = \max_{x \in [0, 2\pi]} | r(x) | + \sup_{x, x' \in [0, 2\pi]} \frac{| r(x) - r(x') |}{| x - x' |^\gamma},$$

$1 \geqslant \alpha > \gamma > \varepsilon > 0$, ε — сколь угодно малое число. Даются оценки постоянных n_0 и M через коэффициенты уравнения (1).

Далее устанавливается следующий факт: если коэффициенты и правая часть (1) имеют все производные до порядка m ($m \geqslant 0$), причем производные порядка m непрерывны в смысле Гельдера с показателем α, то решение $\varphi(x)$ также имеет m производных, причем последняя удовлетворяет условию Гельдера с показателем β, где $0 < \beta < \alpha$ (здесь под производными ядра $n(t, x)$ понимаются частные производные).

В условиях предыдущей теоремы доказывается, что система

$$a_i \tilde{\varphi}_i + \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n-1}{}' n(x_k, x_i) \operatorname{ctg} \frac{x_k - x_i}{2} \tilde{\varphi}_k = f_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2n-1) \tag{4}$$

(здесь Σ' означает, что суммирование ведется только по тем k, для которых $k - i$ нечетно, $x_i = i \cdot h$, $h = \frac{\pi}{n}$) для $n > n_0$ имеет определитель, отличный от нуля; если через $p_1^{-1}\tilde{\varphi}$ обозначить тригонометрический полином, проходящий через точки: $(0, \tilde{\varphi}_0)$, $(h, \tilde{\varphi}_1)$, $(2h, \tilde{\varphi}_2), \ldots, (2\pi - h, \tilde{\varphi}_{2n-1})$, $(2\pi, \tilde{\varphi}_0)$, то имеет место следующая оценка близости решений $\tilde{\varphi}$ и φ:

$$\| p_1^{-1}\tilde{\varphi} - \varphi \|_\gamma \leqslant \frac{N}{n^{m+\alpha-\gamma-\varepsilon}}. \tag{5}$$

Даются оценки постоянных n_0 и N.

Кроме высокой скорости сходимости, система (4) обладает еще одним важным свойством: к ней может быть применен процесс последовательных приближений, предложенный Мульткоппом в 1938 г.; это делает предлагаемый метод очень удобным. Последний метод может быть приложен к регулярным фредгольмовским уравнениям.

С. Б. Стечкин (*Москва*). **Проблема абсолютной сходимости ортогональных рядов.** В докладе дан обзор известных результатов, относящихся к проблеме абсолютной сходимости ортогональных рядов, а также изложено общее решение этой проблемы (см. [1]).

Лит.: 1. Стечкин С. Б., ДАН СССР 102 (1955).

Г. Д. Суворов (*Томск*). **О непрерывности однолистных отображений произвольных замкнутых областей.** 1. Пусть D — произвольная односвязная область плоскости $z = x + iy$, содержащая начало координат. Мы используем в этой плоскости сферическую метрику (R), получаемую проектированием плоскости на сферу Римана радиуса (R), касающуюся плоскости в начале координат. Относительное расстояние $\rho(z_1, z_2; D; R)$ между точками z_1, z_2 области D вводится на основе определения М. А. Лаврентьева. Это расстояние будет метрическим. Аналогично вводится понятие «граничной точки» D и определяется расстояние между ними.

2. Через l_ξ обозначим множество всех точек из D, расположенных на прямой $x = \xi$, если это множество не пусто. Так же определяется множество l_η, $y = \eta$. Пусть D_x — проекция D на ось OX. Говорят, что некоторое свойство имеет место *почти для всех множеств* l_x, если для любого измеримого подмножества $D'_x \subset D_x$ найдется подмножество $E \subset D'_x$, $\operatorname{mes} E = \operatorname{mes} D'_x$ и такое, что при $\xi \in E$ ука-

занное свойство имеет место для l_ξ. Вещественную функцию $f(p)$, определенную в D, называют абсолютно непрерывной внутри l_ξ, если на любом замкнутом промежутке $[A, B] \subset l_\xi$ функция $f(p)$, рассматриваемая как функция точки этого промежутка, имеет производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ почти всюду на $[A, B]$ и $\int\limits_{A'}^{B'} \frac{\partial f}{\partial y} dy = f(B') - f(A')$ для всех $A', B' \in [A,B]$. Вещественная функция $f(p)$ есть функция класса BL в области D, если эта функция определена в D, абсолютно непрерывна внутри l_x и l_y почти для всех таких множеств и $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ суммируемы в D. Отображение $w = T(z)$, $T(z) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ есть отображение класса BL в D, если обе функции f_1 и f_2 — класса BL в D.

Наконец, через C_k' обозначают класс таких отображений $T = f_1 + if_2$, что отображения $T_n(z) = f_{1n}(x, y) + if_{2n}(x, y)$, (где $f_{in} = f_i$, если $|f_i| \leqslant n$, и $f_{in} = 0$, если $|f_i| > n$) принадлежат классу BL и удовлетворяют неравенству

$$\iint\limits_D \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} \operatorname{grad}^2 \mathrm{fin}}{\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{2} f_{in}^2\right)^2} dxdy \leqslant k$$

для всех натуральных n.

3. Теорема. Предположим, что односвязная ограниченная или неограниченная область D содержит круг $|z| < \delta < 1$ и $w = T(z)$, $T(0) = 0$, $T(z) = f_1(x, y) + if_2(x, y)$ есть произвольное топологическое класса C_k' отображение области D на ограниченную или неограниченную область Δ. Введем еще обозначения: $\delta_R = 2R \operatorname{arctg} \frac{\delta}{2R}$ — сферический радиус круга $|z| < \delta$ в метрике (R), $d_r(\Delta^*)$ — сферический диаметр границы области Δ в метрике (r),

$$I(T, D, r) = \iint\limits_D \frac{\sum\limits_{i=1}^{2} \operatorname{grad}^2 f_i}{\left[1 + \sum\limits_{i=1}^{2} \left(\frac{f_i}{2r}\right)^2\right]^2} dxdy,$$

$$\alpha_0 = \delta_{R/\exp} \frac{4\pi I(T, D, r)(\delta_R + 1)}{\delta_R [d_r(\Delta^*)]^2}, \quad d_0 = \min\left(\frac{\delta_R}{2^{\delta R + 1}}, \alpha_0\right).$$

Тогда, если z_1 и z_2 — внутренние или «граничные» точки замкнутой области D, при

$$0 < \rho(z_1, z_2; D; R) < 2R \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{d_0}{2R}\right)$$

будет

$$\rho[T(z_1), T(z_2); \Delta; r] <$$

$$< \left[\frac{4\pi I(T, D, r)(\delta_R + 1)}{\delta_R}\right]^{\frac{1}{2}} \left\{\ln \frac{\delta_R}{R \arcsin\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\rho(z_1, z_2; D, R)}{R}\right]}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

4. При различных предположениях об областях D и Δ предельными переходами из этих неравенств получаются оценки порядка равностепенной непрерывности изучаемых классов отображений.

П. К. Суетин (*Уральск*). **О многочленах, ортогональных по площади.** Асимптотическая формула для многочленов, ортогональных по площади, доказывается при значительно более общих условиях, чем это делалось ранее. Пусть $\{P_n(z)\}$ есть многочлены, ортонормированные с весом $n(z)$ по площади области G, ограниченной кривой Γ. Обозначим через $w = \Phi(z)$ функцию, отображающую дополнение G_∞ замкнутой области $\overline{G}$ на дополнение единичного круга при условиях $\Phi(\infty) = \infty$ и $\Phi'(\infty) > 0$. Пусть $f(z)$ есть аналитическая в области G_∞ функция, граничные значения которой удовлетворяют условию $n(z) = |f(z)\,\Phi'(z)|^2$.

Теорема. Если положительная функция $n(z)$ удовлетворяет в замкнутой области $\overline{G}$ условию Липшица, а Γ есть правильная аналитическая кривая, то равномерно внутри G_∞ имеет место асимптотическое равенство

$$P_n(z) \approx \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,\frac{\Phi(z)^n}{f(z)}.$$

А. А. Талалян (*Ереван*). **О сходимости почти всюду ортогональных рядов.** Рассматриваются вопросы сходимости почти всюду рядов Фурье функций из класса $L_2(0.1)$ по О.Н. системам $\{\varphi_n(x)\}$.

Известно, что основные результаты в этой области принадлежат Д. Е. Меньшову [2], [3], [4].

Используя эти результаты Меньшова, можно получить некоторые новые результаты. Именно, справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Любая наперед заданная функция $\omega(x) = o(\lg^2 x)$, $x \geqslant 1$, растущая достаточно правильно, является точным множителем Вейля для некоторой О.Н. системы $\{\varphi_n(x)\}$.

Теорема 2. Какова бы ни была не эквивалентная нулю функция $f(x) \in L_2(0,1)$, можно определить такую О.Н. систему $\{\varphi_n(x)\}$ функций, заданных на $[0,1]$, что ряд Фурье функции $f(x)$ по этой системе расходится почти всюду.

Далее, рассматривая общие ортогональные ряды, которые не обязательно являются рядами Фурье от функций с интегрируемым квадратом, можно обобщить известные теоремы Марцинкевича [1] о ненулевых рядах, у которых некоторая подпоследовательность частных сумм сходится почти всюду к нулю.

Лит.: 1. Marcinkiewicz, Ann. de la Soc. Pol. de Math. 16, (1938), 84—95, 2. Меньшов Д. Е., Fund. Math. 4, (1923), 82—105. 3. Меньшов Д. Е., Fund. Math., 10, (1927), 375—420. 4. Меньшов Д. Е., Матем. сб., 6 (48), (1939), 27—52.

А. А. Темляков (*Москва*). **Интегральное представление функций двух комплексных переменных.** В работе рассматриваются, в качестве областей определения функций двух комплексных переменных, $(p,\ q)$ — двояко-круговые области, являющиеся обобщением известных двояко-круговых областей ($p=q=1$). Функция $F(w,\ z)$, определенная в какой-либо из этих областей D, предполагается взятой из класса функций, аналитических в области D, и «аналитической изнутри в замкнутой области $\overline{D}$». Выделяемый класс функций включает в себя класс аналитических функций в замкнутой области $\overline{D}$ и содержится в классе функций, аналитических в области D и непрерывных в замкнутой области $\overline{D}$. В работе устанавливается свойство, присущее функциям этого класса: значения функции $F(w,\ z)$ в области D определяются значениями линейного дифференциального оператора

$$L[F] \equiv F(w,\ z) + pwF'_w(w,\ z) + qzF'_z(w,z)$$

на границе области $\overline{D}$. Из этого свойства следует и более общее предложение: значения функции $F(w,\ z)$ в области D определяются значениями оператора $L[Ff]$ на границе области $\overline{D}$, если известна функция $f(w,\ z)$ в области $\overline{D}$.

А. Ф. Тиман (*Днепропетровск*). **О линейных процессах приближения периодических функций тригонометрическими полиномами.**

1. Линейные методы суммирования рядов Фурье. Константы Лебега.

2. О линейных процессах, дающих наилучший порядок приближения.

3. Оценки для одного класса процессов приближения периодических функций тригонометрическими полиномами.

4. Линейные методы суммирования последовательностей интерполяционных полиномов для системы равноотстоящих узлов. Теорема С. М. Лозинского и некоторые ее уточнения.

5. О линейных процессах, дающих наилучший порядок приближения для периодических функций многих переменных.

6. Некоторые задачи, возникающие при изучении аппроксимативных свойств линейных процессов приближения.

А. Ф. Тиман (*Днепропетровск*). **О некоторых вопросах конструктивной теории функций, заданных на конечном отрезке вещественной оси.**

1. О теоремах Джексона и Зигмунда. Конечный отрезок. Некоторые задачи для квази-гладких функций Зигмунда.

2. Особенности случая приближений алгебраическими многочленами на конечном отрезке.

3. Теорема С. М. Никольского и ее обобщение. Гипотеза С. М. Никольского.

4. Усиление теоремы Джексона для приближений алгебраическими многочленами на конечном отрезке.

5. Обратные теоремы конструктивной теории функций, заданных на конечном отрезке вещественной оси.

6. Ряд П. Л. Чебышева. Асимптотические и точные оценки приближений непрерывных и дифференцируемых функций.

7. Некоторые задачи, возникающие при изучении приближения функций алгебраическими многочленами на конечном отрезке.

Ю. Ю. Трохимчук (*Новосибирск*). **О проблемах Н. Н. Лузина в теории функций комплексного переменного.** В докладе рассматриваются следующие вопросы:

1. Определение множеств моногенности непрерывной функции комплексного переменного.

2. Структура множества моногенности.

3. Структура множеств моногенности на множестве полной меры.

4. О функциях с постоянным множеством моногенности.

5. Приложение к аналитическим функциям с совершенным множеством особых точек.

Г. Ц. Тумаркин (*Москва*). **О некоторых граничных свойствах последовательностей аналитических функций.** В теории функций находят широкое применение критерии равномерной сходимости последовательностей аналитических в области G функций $\{f_n(z)\}$, использующие сходимость граничных значений $\{f_n(\zeta)\}$ этих функций (под граничными значениями понимается предел $f(z)$ по любому некасательному к границе γ области G пути. Рассматриваемые в дальнейшем функции имеют граничные значения почти всюду на γ). Так, часто применяется теорема Хинчина—Островского, утверждающая, что если G есть круг $|z|<1$,

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ |f_n(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant C, \qquad 0<r<1, \qquad n=1, 2, \ldots, \tag{1}$$

и существует

$$\lim_{n\to\infty} f_n(e^{i\theta}), \qquad e^{i\theta} \in E, \qquad mE>0, \tag{2}$$

то $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится внутри $|z|<1$.

В теореме Хинчина—Островского утверждается лишь равномерная сходимость $\{f_n(z)\}$ в любой замкнутой подобласти $\overline{D} \subset |z|<1$ и ничего не говорится о характере сходимости $\{f_n(z)\}$ в замкнутых подобластях $\overline{D}$, примыкающих к $|z|=1$. Мы показываем, что при выполнении условий (1) и (2) из $\{f_n(z)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, равномерно сходящуюся в замкнутых подобластях $\overline{D}$ круга $|z|\leqslant 1$, ограниченных спрямляемыми кривыми, содержащими подмножества E меры, сколь угодно близкой к мере E (см. [2]). Заметим, что для того, чтобы утверждать равномерную сходимость в подобластях, примыкающих к границе области, в ранее известных результатах на функции $f_n(z)$ и характер сходимости $\{f_n(\zeta)\}$ обычно накладывались значительные требования и рассматривались случаи, когда E совпадает с дугой границы G. В качестве простого следствия отсюда получается, что при выполнении условия (1) и (2) $\lim f_n(e^{i\theta})=f(e^{i\theta})$ при $e^{i\theta}\in E$, где $f(e^{i\theta})$ — граничные значения $f(z)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$. Отмеченный только что факт совпадения на E предела граничных значений с граничными значениями предельной функции использовался нами при рассмотрении приближения в среднем с весом функций на спрямляемых кривых многочленами или рациональными дробями (см. [3], [4]). Кроме того, используя приведенный выше результат и одну работу Н. Н. Лузина [1], удается показать, что при условиях (1) и (2) можно выделить $\{f_{n_k}(z)\}$ и найти такое множество $E_1\subset E$, $mE_1=mE$, что для любого угла D_θ с вершиной в $e^{i\theta}\in E_1$ и со сторонами, лежащими в $|z|<1$, выполняется равенство

$$\lim_{n_k\to\infty}\iint\limits_{D_\theta}|f'(z)-f'_{n_k}(z)|^2\,ds=0.$$

В связи со сказанным выше встает задача: указать условия, обеспечивающие сходимость $\{f_n(\zeta)\}$. Нами показано, что при известных предположениях о функциях $f_n(z)$ можно из сходимости только действительных частей граничных значений или их модулей и равномерной сходимости $\{f_n(z)\}$ внутри области заключать о сходимости $\{f_n(\zeta)\}$. В дополнение к ранее опубликованным результатам (см. [5] и [6]) получены некоторые новые результаты в этом направлении. Отметим здесь некоторые свойства последовательностей аналитических в области функций, у которых площади римановых поверхностей, построенных над сферой, равномерно ограничены. Для таких последовательностей достаточно потребовать лишь равномерной сходимости их внутри G, чтобы отсюда уже заключить о сходимости по мере последовательности их граничных значений. Заметим также, что сформулированные выше результаты справедливы и для таких последовательностей.

Лит.: 1. Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 1, М., 1953. 2. Тумаркин Г. Ц., ДАН СССР, 105, № 6 (1955). 3. Тумаркин Г. Ц., ДАН СССР, 84, № 1 (1952). 4. Тумаркин Г. Ц., ДАН СССР, 98, № 6 (1954). 5. Тумаркин Г. Ц., ДАН СССР, 83, № 5 (1952). 6. Тумаркин Г. Ц., ДАН СССР, 98, № 5 (1954).

П. Л. Ульянов (*Москва*). Об A-интегралах Коши. Пусть $f(\theta)=f_1(e^{i\theta})$ есть L-интегрируемая 2π-периодическая функция и

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}(L)\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{f_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\qquad(|z|<1)\tag{1}$$

L-интеграл типа Коши от функций $f_1(\zeta)$ $(\zeta=e^{i\theta})$. Известно, что функция $F(z)$ допускает представление в виде (1), не единственное, т. е. существует бесконечно много функций $\varphi(\zeta)$, для которых L-интеграл типа Коши, взятый по единичной окружности, дает функцию $F(z)$.

Возникает вопрос о возможности нахождения наиболее целесообразного единственного представления функции $F(z)$ по формуле, аналогичной формуле (1).

Обозначим через $F(\zeta)$ угловые предельные значения $F(z)$ при $z\to\zeta$, где $|\zeta|=1$.

Оказывается, что справедливо следующее утверждение:

Всякая функция $F(z)$ вида (1) допускает представление

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}(A)\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\,(|z|<1),\tag{2}$$

где в правой части формулы (2) берется не L-интеграл, а A-интеграл, и это существенно.

Интеграл в формуле (2), очевидно, является A интегралом Коши для функции $F(z)$. Можно также утверждать, что моменты

$$(A) \int\limits_{|\zeta|=1} F(\zeta)\, \zeta^n d\zeta = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Отметим, что аналогичного типа утверждения имеют место и для более общих контуров.

В. С. Федоров (*Иваново*). **О моногенных функциях.** Будем называть во всем дальнейшем алгеброй A всякую ассоциативную и коммутативную алгебру, обладающую единицей и конечного ранга над полем комплексных чисел.

Пусть

$$\zeta = \sum_{k=0}^{m-1} a_k e_k, \qquad f = \sum_{k=0}^{m-1} b_k e_k,$$

где $e_0, \ldots, e_{m-1}$ — база какой-либо алгебры A; a_k и b_k — однозначные комплексно-значные функции точки некоторой области D эвклидова пространства $E^n(x_1, \ldots, x_n)$ (имеем $m \geqslant n$ или $m < n$). В частности, f и ζ — обыкновенные комплексные функции от $x_1, \ldots, x_n$. Назовем f моногенной по ζ в области D и будем писать тогда

$$f = f\{\zeta; D\}, \tag{I}$$

если найдется третья гиперкомплексная функция

$$\psi = \sum_{k=0}^{m-1} c_k e_k$$

(c_k — однозначная комплекснозначная функция точки области D) со следующими свойствами: полагая $\Delta f = f(M') - f(M)$, $\Delta\zeta = \zeta(M') - \zeta(M)$, $\rho = |\overline{MM'}|$ для всякой фиксированной точки M области D и любой переменной точки M' этой области, будем иметь, что каждая компонента разности $\Delta f - \psi(M)\,\Delta\zeta$ есть $o(\rho)$ при $M' \to M$. Назовем ψ первой производной f по ζ (это название оправдано тем, что, в силу (I) имеем, очевидно, в области D в случае существования полного дифференциала $d\zeta$ по $x_1, \ldots, x_n$ в этой области $df = \psi \cdot d\zeta$).

Аналогично определяем моногенность f по нескольким гиперкомплексным функциям $\zeta_1, \ldots, \zeta_p$ в области D и тогда пишем

$$f = f\{\zeta_1, \ldots, \zeta_p;\ D\}. \tag{II}$$

Основные задачи. 1. При каких необходимых и достаточных условиях, наложенных на ζ для данной алгебры A всякая f, в силу одного условия (I), имеет ψ моногенную по ζ в области D, и потому f имеет производные всех порядков по ζ в этой области?

2. Если функции $a_0, \ldots, a_{m-1}$ образуют в области D решение данной системы дифференциальных уравнений с частными производными по $x_1, \ldots, x_n$, то в каких случаях всякая f, в силу одного условия (I), имеет свои компоненты $b_0, \ldots, b_{m-1}$ также образующими решение указанной системы в области D?

3. При какой ζ для данной алгебры A все допустимые рациональные операции над функциями f, моногенными по этой ζ в области D, приводят опять к функциям с тем же свойством?

4. Аналогичные задачи в случае (II).

Мною и моим учеником И. А. Моревым получены некоторые результаты, частично разрешающие поставленные задачи. Так, например, И. А. Морев доказал в своей еще не опубликованной работе, что множество всех комплексных решений $(z_0, \ldots, z_{m-1})$ в данной области D плоскости xy системы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) z_0 = 0, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) z_k = -\,\frac{\partial}{\partial y}\, z_{k-1} \quad (k = 1, \ldots, m-1)$$

совпадает со множеством $\mathfrak{M}$ всех функций

$$F = \sum_{k=0}^{m-1} z_k e_k,$$

моногенных (для некоторой специально подобранной алгебры A) по одной и той же ζ в области D.

При этом множество $\mathfrak{M}$ есть кольцо и всякая F, $F \in \mathfrak{M}$, разлагается в ряд Тейлора, как функция от ζ, в некоторой окрестности каждой точки области D.

К. М. Фишман (*Черновцы*). **Об одном классе гильбертовых пространств аналитических функций.** 1. Рассматривается пространство z_E^2 всех аналитических в единичном круге C_1 (или на всей плоскости C_∞) функций $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, для которых

$$\sum_0^\infty |a_n|^2 \alpha_n < \infty, \quad E(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\alpha_n}, \quad 0 < \alpha_n < \infty, \ \lim \sqrt[n]{\alpha_n} = 1 \quad \left(\sqrt[n]{\alpha_n} \to \infty\right).$$

В этом пространстве значение любой производной в фиксированной точке есть линейный ограниченный функционал, т. е. z_E^2 есть пространство с воспроизводящим ядром $E(\bar{\zeta}, z)$. Если $\alpha_n = \int_0^1 \sigma(\rho)\, \rho^{2n} d\rho \left(\int_0^\infty \sigma(\rho)\, \rho^{2n}\, d\rho\right)$, то $z_E^2 \equiv z_{E_\sigma}^2$. Пространства $z_{E_\sigma}^2$ в совокупности содержат все аналитические в C_1 (C_∞) функции.

2. Используя основные свойства пространств с воспроизводящим ядром, мы даем различные интегральные представления функций класса z_E^2 и $z_{E_\sigma}^2$ через функции, суммируемые с квадратом в C_1 (C_∞), или через функции, суммируемые с квадратом на единичной окружности.

3. Обобщая произведение Бляшке на случай любого расположения нулей аналитической функции в C_1, можно любую мероморфную функцию представить в виде произведения отношения двух обобщенных произведений Бляшке на явно выписанный экспоненциальный множитель.

4. Дается необходимое и достаточное условие восстановлений функций класса z_E^2 по значениям последовательных производных $f^{(n)}(\beta_n)$ (задача Абеля—Гончарова).

5. Используя некоторые свойства операторов с простым спектром в гильбертовом пространстве, мы изучаем вопрос о полноте последовательности $g_k(z) = \sum_0^\infty b_n^k a_n z^n$ при различных предположениях о последовательности $\{bn\}_0^\infty$.

6. Доказывается общий признак разложимости в биортогональный ряд, с помощью которого изучается вопрос о разложимости аналитических функций в обобщенный ряд Тейлора.

Часть результатов настоящей работы изложена в статье, опубликованной в Успехах матем. наук, т. X, в. 2 (1955).

Н. А. Фуксман (*Ташкент*). **Об аналитических функциях целого комплексного аргумента.** Исследуется класс функций, имеющих то же отношение к дискретным процессам суммирования и взятия конечных разностей, какое имеют аналитические функции к процессам интегрирования и дифференцирования. Эти функции введены Н. П. Романовым и названы им аналитическими функциями целого комплексного аргумента.

Конечно-разностный аналог условий Коши—Римана имеет вид:

$$f_{x+1,\, y+1} - f_{x,y} = i\,(f_{x+1,\, y} - f_{x,\, y+1}),$$

где $f_{x,\, y} = f(x+iy)$; x, y принимают целые значения.

Исследованы некоторые свойства этих функций, вопрос аналитического продолжения, периодические аналитические функции целого комплексного аргумента. Установлен аналог гармонических функций.

С. Я. Хавинсон (*Москва*). **Системы П. Л. Чебышева и единственность многочлена наилучшего приближения в метрике пространства L_1.** В то время как в пространстве L_p, $p > 1$, единственность многочлена наилучшего приближения в метрике L_p для произвольной $\omega(x) \in L_p$ автоматически вытекает из строгой нормированности этого пространства, в пространстве L_1 дело обстоит значительно сложнее. В 1924 г. Джексон [1] доказал, что многочлен n-й степени, наименее уклоняющийся на $[a, b]$ в метрике L_1 от непрерывной на $[a, b]$ функции $\omega(x)$, — единственен. М. Г. Крейн [2] в 1938 г. доказал единственность наилучшего приближения (в L_1) непрерывной функции $\omega(x)$ линейными комбинациями (многочленами) по функциям $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, которые образуют систему П. Л. Чебышева на (a, b).

Пусть E — множество в некотором метрическом сепарабельном пространстве R, μ — неотрицательная мера B множеств в R. Обозначим через $L_1(\mu)$ пространство суммируемых (μ) на E функций с нормой $\|\omega\| = \int\limits_E |\omega(x)|\, d\mu$. Пусть $H = \{\varphi(x)\}$ — подпространство в $L_1(\mu)$, состоящее из непрерывных функций.

В заметке [3] (теорема 3) нами был указан необходимый и достаточный критерий для того, чтобы для всякой непрерывной функции $\omega(x)$ функция $\varphi^*(x) \in H$, реализующая $\inf\limits_{\varphi \in H} \int\limits_E |\omega(x) - \varphi(x)|\, d\mu$, была единственной (если она вообще существует). (При этом предполагается, что E — приведенное множество относительно меры μ).

С помощью этого критерия можно доказать цитированный выше результат М. Г. Крейна для случая, когда лебеговская мера заменена произвольной мерой μ, в которой $[a, b]$ — приведенное множество. В то же время из этого критерия вытекает, что система $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ вовсе не обязана быть системой П. Л. Чебышева, чтобы обеспечивать единственность наилучшего приближения для всякой непрерывной $\omega(x)$ при данной мере μ. Таким образом, прямого аналога известной теоремы Хаара о приближениях в пространстве C для пространства L_1 не получается. Однако справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — такая система непрерывных на $[a, b]$ функций, что всякий многочлен из функции этой системы имеет нигде не плотное множество нулей на $[a, b]$. Для того чтобы при любой мере μ, в которой $[a, b]$ — приведенное множество, для любой непрерывной $\omega(x)$ многочлен (из функций системы) наилучшего приближения в метрике $L_1(\mu)$ был единственным, необходимо и достаточно, чтобы система была системой П. Л. Чебышева на (a, b).

Приведем еще одну теорему.

Теорема 2. Пусть μ — некоторая (неотрицательная) мера. Для того чтобы у любой непрерывной $\omega(x)$ и любой системы П. Л. Чебышева $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ (n — фиксировано) многочлен из функций $\varphi_1(x). \ldots, \varphi_n(x)$, наименее уклоняющийся от $\omega(x)$ в метрике $L_1(\mu)$, был единственным, необходимо и достаточно, чтобы множество точек роста меры μ было либо некоторым отрезком $[C, d] \subset [a, b]$, либо состояло ровно из n точек.

Лит.: 1. Jackson D., Amer. Journ. of Math., XLVI, 1924, 215—234. 2. Крейн М. Г., О некоторых вопросах теории моментов, Харьков, 1938 (статья IV). 3. Хавинсон С. Я., ДАН СССР, **105**, № 6, (1955).

Г. Н. Чеботарев (*Казань*) **Некоторые матричные уравнения и их применение к решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций и к решению систем линейных дифференциальных уравнений.** Исследуются все типы матриц второго порядка $A(t)$, для которых краевая задача Римана для системы двух пар функций

$$X^+(t) = A(t)\, X^-(t)$$

допускает решение с помощью теории функций от матриц по формуле Ф. Д. Гахова:

$$X(z) = e^{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln A(t)\,dt}{t-z}}.$$

Дело сводится к решению матричного уравнения $e^B \cdot e^C = e^{B+C}$ в некоммутативных матрицах B, C второго порядка.

Аналогично рассматриваются случаи, когда система линейных однородных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{dt} = A(t)\, x$ допускает решение по формуле

$$x = e^{\int\limits_{t_0}^{t} A(\tau)\,d\tau} \cdot x_0.$$

Для этого определяется общий вид матрицы второго порядка, для которой экспоненциал дифференцируется по «обычному» правилу:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{B(t)}\right) = \frac{dB(t)}{dt} \cdot e^{B(t)}.$$

Кроме того, исследуется общий вид функциональной матрицы второго или третьего порядка, коммутативной со своей производной.

В. Г. Челидзе (*Тбилиси*). **Некоторые методы суммирования кратных рядов.** Рассматриваются некоторые общие теоремы о линейных преобразованиях кратных последовательностей. На основании этих теорем доказывается ряд теорем, касающихся частных методов суммирования кратных рядов.

Л. И. Чибрикова (*Казань*). **О краевой задаче Римана для автоморфных функций.** Дается полное решение следующей краевой задачи: найти кусочно-голоморфную автоморфную функцию $\Phi(z)$, принадлежащую некоторой элементарной или фуксовой группе дробно-линейных подстановок, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\ \Phi^-(t) + g(t)$$

на данном контуре. $G(t)$ и $g(t)$ — заданные функции точек этого контура.

В качестве приложений дается решение в явном виде некоторых полных сингулярных интегральных уравнений с автоморфными ядрами и решение задач об обтекании некоторых периодических решеток.

А. Л. Шагинян (*Ереван*). **О скорости полиномиальных приближений на замкнутых совокупностях.** 1. Пусть E — произвольная замкнутая совокупность с односвязным дополнением на плоскости комплексного аргумента z, E_∞ — дополнение к E относительно всей плоскости.

Обозначим через $w = \varphi(z)$ функцию, конформно отображающую E_∞ на $|w| > 1$.

Доказывается, что если z_1 и z_2 — произвольные точки из E_∞, а w_1, w_2 — соответствующие им точки в $|w| > 1$, то

$$|w_2 - w_1| > \alpha \cdot l \cdot e^{-\int\limits_L \frac{ds}{\rho(s)}},$$

где L — произвольная спрямляемая замкнутая кривая, проходящая через z_1 и z_2 и охватывающая совокупность E, s — дуговое расстояние переменной на L точки, $\rho(s)$ — расстояние этой точки от E, l — расстояние z_1 от z_2 по дуге L. Постоянное α оценивается.

Этот результат содержит, в частности, известную оценку М. А. Лаврентьева [1] в теории однолистных функций.

2. Предыдущее неравенство дает возможность оценить скорость полиномиальных приближений аналитических на замкнутой совокупности функций. Вот одна теорема такого рода.

Пусть C — произвольная самонепересекающаяся кривая Жордана, обоими концами уходящая в бесконечность.

Назовем r-порцией кривой C ее связную часть внутри $|z| \leqslant r$, содержащую некоторую фиксированную на C точку.

Возьмем произвольную область Ω, ограниченную счетным числом самопересекающихся кривых указанного типа.

Через L обозначим полную границу области Ω. Дополнительно потребуем, чтобы каждая r-порция границы L, обозначаемая через L_r, содержала конечное число жордановых дуг с ограниченной линейной мерой.

Пусть E — произвольный континуум внутри Ω с единственной общей с L точкой в ∞.

Допустим, что E содержит начало 0. Обозначим через E_r связную часть E в $|z| \leqslant r$. Тогда, если $f(z)$ регулярна и ограничена ($|f(z)| \leqslant M$) внутри Ω и непрерывна вплоть до L, за исключением, может быть, точки $z = \infty$, то при любом натуральном n существует полином $P_n(z)$ степени n такой, что на E

$$\exp\left\{-\exp\left[\int\limits_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)}\right]^{\gamma}\right\} \cdot |f(z) - P_n(z)| < \exp\left\{-cn\exp\left[-(\lg n)^{\frac{1}{\gamma}}\right]\right\},$$

где $\gamma > 1$, C — постоянная, зависящая от M, $\int\limits_{L_r} \frac{ds}{\rho(s)}$ распространен на r-порцию границы L, $\rho(s)$ — расстояние переменной точки на L_r до E_r. Для каждого z в весовой функции фигурирует минимальное значение r, соответствующее E_r-порциям, покрывающим z. Показатель $\frac{1}{\gamma}$ в правой части, вообще говоря, нельзя понизить.

Лит.: 1. Лаврентьев М. А., ДАН СССР, 4, № 5, (1936), 207—209.

И. А. Эзрохи (*Киев*). **Общие функционально-аналитические методы установления алгорифма для построения остаточных членов линейных многомерных формул приближения.** Остаточный член $R(f)$ линейной формулы приближения, точный для многочленов не выше определенной степени, действующий в некотором пространстве, представляет собой линейный функционал в этом пространстве, аннулирующийся на той же совокупности многочленов.

В 1939 г. Е. Я. Ремез ([3], [4], [5]) дал общий метод нахождения алгорифма построения линейного функционала, аннулирующегося на многочленах степени не выше $s-1$, в некоторых пространствах функций одной вещественной переменной. В 1948 г. А. Сард [6] получил эти же результаты другим методом.

В 1950 г. Т. Г. Эзрохи ([12], [13], [14]) установила общую форму линейного функционала $R(f)$, аннулирующегося на совокупности многочленов суммарной степени не выше $s-1$, в пространстве функций n переменных, заданных на звездообразной области и имеющих как непрерывную, так и суммируемую (при некоторых предположениях) радиальную производную μ-го ($\mu \leqslant s$) порядка. Среди частных случаев дан остаточный член $R(f)$ кубатурной формулы в пространстве n переменных, переоткрытый Р. Мизесом в 1954 г. [1]. Автор совместно с Т. Г. Эзрохи [11] установил алгорифм построения $R(f)$ в пространстве функций, имеющих суммируемую с p-й степенью ($p \geqslant 1$) μ-ю ($\mu \leqslant s$) радиальную производную, и улучшил форму некоторых полученных ранее результатов. А. Сард [7] в 1951 г., а затем в 1954 г. [8] сделал то же для функционалов во введенных им пространствах B_{pq}, A_{pq}, K_{pq}, заданных на гиперкубе.

Автором [10] исследованы линейные функционалы $V(f)$ в пространстве функций n переменных, аннулирующиеся уже для многочленов степени не выше s_i-1 по x

($i=1, 2, \ldots, n$). Доказано, что каждый линейный функционал $V(f)$ в пространстве функций n переменных, имеющих s_i-непрерывные или суммируемые с p-й степенью ($p\geqslant 1$) частные производные по x_i с соответствующей нормой, является суммой n линейных функционалов $V_i(f)$, каждый из которых аннулируется для функций, являющихся многочленом лишь по одной переменной соответствующей степени. Для последних дается алгорифм построения.

В качестве примеров получены в общем виде остаточные члены как для интерполяционных, так и для кубатурных формул, содержащих лишь несмешанные производные. Рассмотрены остаточные члены разных «вырожденных» интерполяционных и кубатурных формул, среди которых содержится, в частности, результат С. М. Никольского [2].

Отсутствие полного алгорифма для построения остаточного члена в ранее рассмотренных автором пространствах привело к рассмотрению пространства функций n переменных, имеющих смешанные непрерывные или суммируемые с p-й степенью ($p\geqslant 1$) производные порядка r ($r=s_1+\ldots+s_n$) с соответствующей нормой. Для этих пространств имеет место формула Тейлора с остаточными членами нескольких видов. Найдена общая форма линейного функционала в этих пространствах, а также функционала $V(f)$. Эти пространства содержат в себе (в теоретикомножественном смысле) пространства, рассмотренные А. Сардом. Результаты сопоставляются. Кроме того, рассмотрены остаточные члены интерполяционных и кубатурных формул для этих пространств. Показано, что формы остаточных членов, приведенные Стефенсоном [9] для «сильно вырожденных» формул, могут быть перенесены, в определенном смысле, на все интерполяционные и кубатурные формулы. Приводятся численные примеры.

Лит.: 1. Mises R., Numerische Berchung mehrdimensionoler Integral, Math. und Mech., 34, № 6 (1954), 201—210. 2. Никольский С. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 16 (1952), 181—196. 3. Ремез Е. Я., Труды Инст. матем. АН УССР, 3 (1939), 21—62. 4. Ремез Е. Я., Труды Инст. матем. АН УССР, 4 (1940), 147—182. 5. Ремез Е. Я., ДАН СССР, 26 (1940), 130—134. 6. Sard A., Duke Math. J., v. 15, № 2 (1948), 333—346. 7. Sard A., Acta Math. 84, (1951), 319—346. 8. Sard A., Linearfunkionals on Kpq, B p. q., Proc. Internat., Congr. Math. (1954), 167—168. 9. Стефенсон И. Ф., Теория интерполяции, М.—Л. ОНТИ, 1935. 10. Эзрохи И. А., Матем. сб., 38 (1956). 11. Эзрохи Т. Г. и Эзрохи И. А., Изв. Киевск. политехн. ин-та. 12. Эзрохи Т. Г., Диссертация. Киев, 1950. 13. Эзрохи Т. Г., ДАН УССР, 3 (1952), 174—179. 14. Эзрохи Т. Г., Зап. Киевск. педагогич. ин-та, т. 16, № 5 (1954), 41—87.

СЕКЦИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

М. С. Бродский (*Одесса*). **Общая теорема умножения характеристических матриц-функций линейных операторов и некоторые ее приложения.** 1. Необходимость обобщения введенного М. С. Лившицем понятия характеристической матрицы-функции линейного оператора. Определение характеристической матрицы-функции, пригодное для любого ограниченного оператора, мнимая часть которого вполне непрерывна. Определение проекции характеристической матрицы-функции на произвольное подпространство. Формулировка общей теоремы умножения. Решение обратной задачи: построение оператора, характеристическая матрица-функция которого равна произведению характеристических матриц-функций двух данных операторов.

2. Определение бесконечномерной жордановой клетки. Примеры. Некоторые достаточные условия, при которых коэффициенты $a_{ij}(x)$ матричного уравнения $\frac{dW}{dx} = \lambda WA(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ однозначно восстанавливаются по вронскиану этого уравнения.

Б. Л. Гуревич (*Одесса*). **Новые типы пространств основных и обобщенных функций и классы единственности обобщенной задачи Коши.** 1. Пространства основных функций, построенные по выпуклым характеристикам; двойственные пространства; вопрос о нетривиальности.

2. Операторная проблема Коши. Общие условия для класса единственности решения.

3. Применения: классы единственности для дифференциально-разностных систем; классы единственности для систем уравнений в свертках.

4. Вопросы о существовании решений в классической форме.

А. С. Кованько (*Львов*). **О компактности систем непрерывных функционалов.** Рассматривается система непрерывных функционалов $\mathfrak{M}\{f(x)\}$ общего типа в полном, метрическом и сепарабельном пространстве A. Расстояние между элементами x_1 и x_2 обозначено через $\rho(x_1, x_2)$.

Теорема. Необходимое и достаточное условие компактности $\mathfrak{M}\{f(x)\}$ в смысле слабой сходимости к непрерывному функционалу состоит в следующем:

1) для фиксированного элемента $x' \in A$ числовая система $\mathfrak{M}\{f(x')\}$ ограничена;

2) каковы бы ни были числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, элемент $x \in A$ и подпространство $B \subset A$, имеющее x своим предельным элементом, найдется такой элемент $x_1 \in B$, что $\rho(x, x_1) < \delta$ и $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$ для всех функционалов $f(x)$ системы $\mathfrak{M}\{f(x)\}$.

Б. Р. Мукминов (*Одесса*). **Разложение по собственным функциям диссипативных ядер.** Доклад посвящается изучению несамосопряженных интегральных операторов с «диссипативными» ядрами $K(x, y)$ $(a \leqslant x,\ y \leqslant b)$, т. е. с ядрами, «мнимая часть» $\operatorname{Im} K(x, y) = \frac{1}{2i}\left[K(x, y) - \overline{K(y, x)}\right]$ которых эрмитово-неотрицательна.

В связи с обоснованием метода Фурье для диссипативных систем, в докладе исследуются вопросы полноты систем собственных функций операторов и вопросы разложения по ним.

В докладе рассматриваются также некоторые применения к дифференциальным уравнениям.

1. Имеет место следующая теорема М. С. Лившица.

Т е о р е м а 1. Если $g=Kf$ — диссипативный интегральный оператор, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\lambda_m}\right) \leqslant \int_a^b \operatorname{Im} K(x, x)\, dx, \tag{1}$$

где λ_n — характеристические числа ядра оператора.

Система главных функций полна в области значений оператора тогда и только тогда, когда в соотношении (1) имеет место знак равенства.

Доказательство, данное М. С. Лившицем, основано на теории характеристических матриц-функций и приведении оператора к треугольной модели. Мы приводим простое доказательство этой теоремы, в котором не использовано понятие характеристической матрицы-функции.

Доказывается следующий критерий полноты для непрерывных диссипативных ядер:

Т е о р е м а 2. Симметричность относительно вещественной оси сопряженной индикаторной диаграммы определителя Фредгольма является необходимым и достаточным условием полноты системы главных функций в области значений непрерывного диссипативного ядра.

С л е д с т в и е 1. Чтобы система главных функций непрерывного диссипативного ядра была полна в области значений этого ядра, достаточно, чтобы определитель Фредгольма $D(\lambda)$ имел нулевой род.

С л е д с т в и е 2. Всякое непрерывное диссипативное ядро $K(x, y)$, удовлетворяющее условию Лившица, имеет полную в области значений этого ядра систему главных функций.

В частности, система главных функций дифференцируемого по y непрерывного диссипативного ядра $K(x, y)$ обладает полнотой в области значений этого ядра.

2. Система $\{\varphi_n\}$ элементов пространства H называется почти ортонормированной, если каждая линейная комбинация $f = \sum_{n=1}^{N} C_n f_n$ элементов этой системы удовлетворяет условию

$$m\,\|f\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{N} |C_n|^2 \leqslant M\,\|f\|^2,$$

где $m \leqslant M$ — положительные постоянные.

Каждый вектор $f \in H$ разлагается в смысле среднего квадратического в ряд по элементам полной почти ортонормированной системы. Имеет место следующая теорема разложения.

Т е о р е м а 3. Пусть $g = Kf$ — интегральный оператор с полным диссипативным ядром $K(x, y)$. Если все характеристические числа λ_n $(n = 1, 2 \ldots)$ ядра простые и удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=1}^{N-1} \left|\frac{\lambda_N}{\lambda_n}\right| \frac{|\operatorname{Im} \lambda_n|}{|\lambda_N - \lambda_n|} < C, \qquad \sum_{n,\, m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \lambda_n \operatorname{Im} \lambda_m}{|\lambda_n - \lambda_m|^2} < \infty,$$

где C не зависит от N, то система собственных функций $\{\varphi_n\}$ является почти ортонормированной системой в L_2.

Из теоремы 3 вытекают следующие частные случаи теоремы разложения:

1. Если характеристические числа λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ полного диссипативного ядра все простые и удовлетворяют условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{Im}\lambda_n| < \infty, \quad |\lambda_m - \lambda_n| \geqslant \delta \quad (\delta > 0, \quad m \neq n),$$

то система собственных функций этого ядра почти ортонормирована.

2. Система собственных функций рассматриваемого ядра почти ортонормирована, если характеристические числа λ_n асимптотически выражаются степенями целых чисел

$$\lambda_n = C_0 n^{\theta} \left\{ 1 + \frac{C_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} \quad (\theta \geqslant 2),$$

где $C_0 \neq 0$, C_1 — вещественные постоянные.

3. Для дифференциальных уравнений отсюда получается следующий результат:

Система собственных функций дифференциального оператора L, порожденного выражением

$$l(y) = y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} P_k(x)\, y^{(n-k)}, \text{ где } a \leqslant x \leqslant b,$$

и распадающимися краевыми условиями

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{jk} y^{(k)}(a) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots m;$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_{jk} y^{(k)}(b) = 0, \quad j = m+1, m+2, \ldots, n,$$

не эквивалентными условиям Коши, при $\operatorname{Im}(Ly), y \geqslant 0$ является почти ортонормированной системой в L_2. В частности, несамосопряженная дифференциальная система четного порядка $m \geqslant 2$,

$$y^{(m)} - q(x)\, y = -f(x) \quad (\operatorname{Im} q(x) \geqslant 0, \quad a \leqslant x \leqslant b),$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_{ks} y^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{ks} y^{(k)}(b) = 0 \quad \left(s = 1, 2, \ldots \frac{m}{2}\right),$$

имеет почти ортонормированную в L_2 систему собственных функций.

Необходимо заметить, что система собственных функций диссипативного дифференциального оператора второго порядка с регулярными краевыми условиями почти ортонормирована в L_2.

А. Б. Найшуль (*Москва*). **Функциональная задача для обыкновенных дифференциальных уравнений.** I. Постановка задачи. В теории обыкновенных дифференциальных уравнений решение различных краевых задач, задач о собственных значениях, об определении периодических решений рассматриваются изолированно одна от другой. В работе показано, что: 1) все эти задачи являются частными случаями более общей функциональной задачи; 2) для функциональной задачи определены достаточные условия существования и единственности решения; 3) как следствие, могут быть получены достаточные условия существования и единственности решения краевых задач, задач о собственных значениях и об определении периодических решений.

Пусть дана система

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_j(x), \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m), \quad i, j = 1, 2, .., n$$

с неизвестными параметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ в правой части и функциональные условия $\Phi_\alpha(y_i(x), \lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m) = 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n+m$, где $\Phi_\alpha(y_i(x), \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ являются функционалами от функций $y_i(x)$. Функциональная задача состоит в определении таких начальных значений y_{i0} и параметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, что решение системы дифференциальных уравнений при данных начальных условиях и параметрах будет удовлетворять функциональным условиям.

II. Метод решения. Предположим, что система дифференциальных уравнений имеет общее решение, зависящее от $n+m$ параметров $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Выберем из $n+m$-параметрического семейства решений те решения, которые будут удовлетворять функциональным условиям. Для этого общее решение подставим в функциональные условия. Мы получим систему $n+m$ конечных уравнений $\overline{\Phi}_\alpha(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots n+m$ для определения $n+m$ неизвестных $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Так как получение решения системы дифференциальных уравнений в явном виде невозможно, то исследование системы алгебраических уравнений будем проводить, опираясь на общие свойства дифференциальных уравнений и функциональных условий. В докладе рассматриваются линейные и нелинейные функциональные задачи.

III. Основные результаты. а) Для линейной функциональной задачи получены: 1) условия существования решения; 2) достаточные условия существования решения в малом и большом; 3) условия существования решения некоторого класса функциональных задач в квадратурах для любой системы дифференциальных уравнений.

б) Для нелинейной функциональной задачи получены: 1) условия непрерывной зависимости решения от параметров; 2) достаточные условия существования решения некоторых функциональных задач; 3) исследовано поведение решения некоторых функциональных задач в окрестности особой точки.

в) Приложение результатов исследования функциональных задач к краевым задачам. Как следствие, получены достаточные условия существования решения краевых задач. Улучшены результаты ряда авторов (см. [1]—[8]).

Лит.: 1. De la Vallée-Poussin, Journ. de Math. pur. et appl. (9), 8, 1929, 125—144. 2. Сансоне Дж., Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II. 3. Picard E., Leçons sur quelques problemes aux limites de la théorie des equations differentielles, Paris, 1930. 4. Hammerstein H., Acta Math., 54, 1930, 117—176; 5. Hirschfeld H. O., Proc. Cambrige Philos. Soc., 32, 1936, 86—95. 6. Cinquini. S., Bull. Un. Math. It., 17, 1938, 99—105. 7. Найшуль А. Б., ДАН СССР, т. LXVII, № 6, 1949; 8. Найшуль А. Б., ДАН СССР, т. 102, № 1, 1955.

В. Н. Никольский (*Калинин*). **Операторные свойства полиномов наилучшего приближения.** Пусть E — пространство типа B, $\{u_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ — система его элементов, линейно независимая и полная в E. Полиномом порядка n будем называть всякую линейную комбинацию $p_n = c_1u_1 + \ldots + c_nu_n$, где $c_n \neq 0$. Нуль θ пространства E будем также считать полиномом, порядок которого меньше порядка любого полинома, отличного от нуля.

Обозначим через $\pi_n(u)$ полиномы, определенные для каждого $u \in E$ и любого $n = 0, 1, 2, \ldots$, причем порядок $\pi_n(u)$ не превосходит n, а $\pi_0(u) = \theta$ для любого $u \in E$. Введем еще следующее обозначение: $R_n(u) = u - \pi_n(u)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть совокупность этих полиномов обладает свойствами:

1) $\pi_n(p_n) = p_n$, если p_n есть полином порядка не выше n;

2) $\pi_n(u + p_n) = \pi_n(u) + \pi_n(p_n)$;

3) $\pi_n(tu) = t\pi_n(u)$ (t — число).

Мы ставим вопрос о том, каким необходимым и достаточным условиям должны подчиняться полиномы-операторы $\pi_n(u)$, чтобы можно было указать метрику пространства E, эквивалентную исходной, в которой они являлись бы (для любых n и $u \in E$) полиномами, наименее уклоняющимися от u?

С этой точки зрения условия 1—3 могут рассматриваться как необходимые, поскольку они выполняются, например когда $\pi_n(u)$ действительно являются, и притом единственными, полиномами наилучшего приближения.

Полученные нами теоремы показывают, что операторы $\pi_n(u)$ должны обладать свойствами, в некотором смысле близкими к свойствам линейных операторов, однако даже линейные полиномы-операторы без дополнительных к ним требований не смогут играть роли полиномов наилучшего приближения.

Теорема. Для того чтобы полиномиальные операторы $\pi_n(u)$ могли стать полиномами наилучшего приближения в некоторой эквивалентной метрике, необходимо и достаточно, чтобы они обладали свойствами 1)—3) и, кроме того, свойствами:

4) каждый оператор $\pi_n(u)$ непрерывен в точке $u = \theta$;

5) существует такая метрика, эквивалентная исходной (норму элемента в которой будем обозначать через $\| u \|_\sigma$), что

$$\| R_{k_1} R_{k_2} \ldots R_{k_m}(u + v) \|_\sigma \leqslant \| R_{k_1} R_{k_2} \ldots R_{k_m}(u) + R_{k_1} R_{k_2} \ldots R_{k_m}(v) \|_\sigma$$

для любых u, $v \in E$ и любой конечной системы целых чисел $0 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_m$;

6) $\lim\limits_{k_m \to \infty} R_{k_1} R_{k_2} \ldots R_{k_m}(u) = \theta$ для всех $u \in E$.

Следствие. Если полиномиальные операторы $\pi_n(u)$ являются линейными, то для того, чтобы они могли быть (в некоторой эквивалентной метрике) полиномами наилучшего приближения, необходимо и достаточно только выполнение условий 1) и 6). В этом случае пространство E будет непременно обладать базисом из полиномов всех порядков. Именно, базис образуют элементы $v_n = R_0 R_1 \ldots R_{n-1}(u_n)$ (полиномы, наименее уклоняющиеся от нуля).

Нами выяснены также условия, при выполнении которых полиномы $\pi_n(u)$ могут стать единственными полиномами наилучшего приближения. Кроме того, проблема наилучшей аппроксимации в нашей постановке оказалась тесно связанной с проблемой существования и строения базиса в пространстве E.

А. И. Поволоцкий (*Ленинград*). **К вопросу о структуре спектра нелинейных уравнений.** 1. Пусть A — нелинейный вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве E, причем $A\theta = \theta$ (θ — нуль пространства E). Те значения λ, при которых уравнение

$$Ax = \lambda x$$

имеет ненулевые решения x, называются собственными значениями оператора A, а сами решения x — собственными векторами. Совокупность собственных значений образует спектр Λ оператора A.

В ряде работ отмечалось, что спектр Λ содержит, как правило, интервалы. Возникла задача о более детальном изучении структуры спектра Λ. Подробно исследуется класс операторов, близких в некотором смысле к линейным вполне непрерывным операторам. Оказалось, что одна близость оператора к линейному не позволяет с достаточной полнотой описать спектр. Существенное влияние на характер спектра оказывает поведение оператора в окрестности нуля и в бесконечности.

Одновременно рассмотрен вопрос о структуре совокупностей собственных векторов.

2. Пользуясь топологическими методами исследования (используется введенный М. А. Красносельским топологический инвариант — вращение вполне непрерывного векторного поля), можно установить следующее.

Спектр Λ оператора A, близкого к линейному, как правило, несвязен, а отдельные его компоненты содержат интервалы. Каждому такому интервалу соответствует непрерывная ветвь собственных векторов. Можно было ожидать, что ветви собственных векторов бесконечны. Однако, как оказалось, могут быть случаи, когда ветви собственных векторов ограничены (образуют в E множества, подобные замкнутым кривым). Наличие таких ограниченных ветвей показывает, что из близости оператора A к линейному оператору не всегда вытекает геометрическая близость совокупностей их собственных векторов.

Рассмотрены вопросы о расположении непрерывных ветвей в E и об их количестве.

В исследовании существенную роль играют кратности собственных значений различных линейных операторов (производная Фреше в θ, асимптотическая производная).

3. В случае, когда исследуемые операторы потенциальны, кратности собственных значений линейных операторов, с которыми сравнивается изучаемый нелинейный

оператор, не играют существенной роли. Для исследования спектров таких операторов применяется вариационный метод, основанный на сравнительном изучении двух близких функционалов и их градиентов. Исследование ведется в гильбертовом пространстве.

Удается получить оценки для числа собственных векторов оператора A заданной нормы и указать интервалы, в которых лежат соответствующие собственные значения.

В качестве предельных случаев получаются, с одной стороны, теорема М. А. Красносельского о законности линеаризации в задаче о точках бифуркации, а с другой стороны, — теорема об асимптотических собственных значениях оператора A.

Полученные теоремы могут быть проиллюстрированы примерами различных нелинейных операторов.

В. Т. Поляцкий (*Одесса*). **Приведение к треугольному виду квази-унитарных операторов.** 1. Оператор T называется квази-унитарным, если оператор $I - T^*T$ — конечномерный. Приведение к треугольному виду квази-унитарных операторов основано на методе характеристических матриц-функций М. С. Лившица.

В работе рассмотрены квази-унитарные операторы, которые имеют по крайней мере одну регулярную точку внутри единичного круга.

Доказана следующая основная теорема: для каждого квази-унитарного оператора можно построить треугольную модель $\vec{T}f$ и унитарное преобразование u так, что $T = u\vec{T}u^{-1}$.

Оператор $\vec{T}f$, определенный в пространстве $\vec{H} = \vec{H}_1 \dotplus \vec{H}_2$, где $\vec{H}_1$ — пространство вектор-функций дискретного, а $\vec{H}_2$ — пространство вектор-функций непрерывного аргументов, значения которых принадлежат эвклидову пространству H_r, определяется формулами:

$$\vec{T}f(k) = f(k)\, t(k)\, e^{i\varphi(k)} - \sum_{j=k+1}^{\infty} f(j)\, p(j)\, \mathfrak{U}^*(j)\, \pi^*(j-1)\, \pi^{*-1}(k).$$

$$\mathfrak{U}^{*-1}(k)\, Jp(k)\, e^{i\varphi(k)} - \int_0^l f(t)\, \sqrt{2}\, p(t)\, \pi^*(t)\, \pi^{*-1}(k)\, \mathfrak{U}^{*-1}(k)\, Jp(k)\, e^{i\varphi(k)} dt$$

$$\vec{T}f(x) = f(x)\, e^{i\varphi(k)} - 2\int_x^l f(t)\, p(t)\, \pi^*(t)\, \pi^{*-1}(x)\, Jp(x)\, e^{i\varphi(x)}\, dt,$$

где $\{ t(k) \}$ — последовательность диагональных вещественных матриц r-го порядка, имеющих одно и только одно собственное число, отличное от единицы; $p^2(k) = | I - t^2(k) |$; $\{ \mathfrak{U}(k) \}$ — последовательность J-унитарных матриц, выбранных так, что $\prod_{j=1}^{\infty} \mathfrak{U}(j)\, t(j)\, \mathfrak{U}^{-1}(j)$ сходится (возможность такого выбора доказана В. П. Потаповым); $\varphi(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\varphi(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant e)$ — скалярные неубывающие функции, причем $\varphi(x+0) = \varphi(x)$;

$$J = \begin{pmatrix} Ip & 0 \\ 0 & -Iq \end{pmatrix} \quad (p + q = r),$$

$$\pi(k-1) = \prod_{j=1}^{k-1} \mathfrak{U}(j)\, t(j)\, \mathfrak{U}^{-1}(j), \qquad \pi(x) = \pi(k)\,|_{k=\infty} \cdot \overset{x}{\underset{0}{\overrightarrow{\int}}} e^{-p^2(t)Jdt}.$$

Отметим, что основная теорема не может быть получена применением преобразования Кэли к треугольной модели квази-эрмитового оператора. Произведение квази-унитарных операторов является квази-унитарным.

2. В докладе рассматривается аналитическое выражение для резольвенты треугольной модели и исследуется дискретный и непрерывный спектр треугольной модели.

Доказана следующая теорема: Дискрегный спектр модели состоит из отличных от единицы собственных чисел матриц $t(k)$, а непрерывный спектр совпадает с множеством $\mathfrak{N}$ значений, принимаемых функцией $e^{i\varphi(x)}$ $(0 \leqslant x \leqslant e)$.

3. Исследуется простота квази-унитарного сжатия, а также дан следующий критерий полноты системы конечномерных инвариантных подпространств квази-унитарного сжатия. Для каждого квази-унитарного сжатия имеет место соотношение

$$|\operatorname{Det} T| = \prod_{k=1}^{\infty} |\zeta_k| \, e^{-l},$$

ζ_k — собственные числа оператора T (определителем квази-унитарного сжатия назовем определитель его матрицы расширеиия)

Система конечномерных инвариантных подпространств сжатия T полна тогда и только тогда, когда

$$|\operatorname{Det} T| = \prod_{k=1}^{\infty} |\zeta_k|.$$

Результаты могут быть обобщены на операторы T, удовлетворяющие условию $|S_p| I - T^*T) < \infty$.

Л. А. Сахнович (*Одесса*). **О приведении несамосопряженных операторов к диагональному виду.** 1. Вопросы разложения по собственным и присоединенным функциям различных классов несамосопряженных операторов с дискретным спектром были изучены Биркгофом [1], Тамаркиным [2], М. В. Келдышем [3] и др. [4].

В работе М. А. Наймарка [5] впервые дано спектральное разложение несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка с непрерывным спектром.

В настоящей работе рассматриваются несамосопряженные операторы A класса $i\Omega$ (см. [6]) с непрерывным спектром.

Мы находим достаточные условия, при которых оператор A может быть приведен к диагональному виду.

Полученные результаты используются для исследования поведения $\|\psi(t)\|$ при $t \to \infty$, где $\psi(t)$ — решение уравнения Шредингера

$$ih \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = A\psi(t), \qquad \psi(0) = \psi_0 \, (\psi_0 \in H),$$

где H — область определения оператора A.

Как известно (см. [6]), всякий оператор $A \, (A \in i\Omega)$ с непрерывным спектром унитарно эквивалентен (с точностью до дополнительной компоненты) оператору $A_1 f = g$:

$$g(x) = \alpha(x) f(x) + i \int_x^l f(t) \beta(t) I dt \beta(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{1}$$

где матрица $\beta(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ неотрицательна и $S_p \beta(x) \equiv 1$, а матрица I диагональна, причем ее диагональные элементы равны либо $+1$, либо -1.

Таким образом, вопрос о возможности приведения оператора $A \, (A \in i\Omega)$ к диагональному виду будет решен, если к такому виду будет приведен оператор A_1 (1).

Под оператором умножения на независимую переменную в пространстве функций H_1 будем понимать оператор, определенный равенством

$$Q_{H_1} \varphi(\sigma) = \sigma \varphi(\sigma), \qquad \varphi(\sigma) \in H_1. \tag{2}$$

Очевидно, оператор Q_{H_1} можно рассматривать как континуальный аналог диагональной матрицы.

Мы будем говорить, что оператор A приводится к диагональному виду, если существует ограниченный оператор B, отображающий взаимно-однозначно H_1 на H и удовлетворяющий условию

$$B^{-1}AB = Q_{H_1}.$$

Допустим, что функция $t = \alpha(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ не имеет интервалов постоянства. Кроме того, предположим, что функция $\sigma(t) = x$ $(\alpha(0) \leqslant t \leqslant \alpha(l))$, обратная к функции $t = \alpha(x)$, имеет равномерно ограниченную производную $\sigma'(t) = p^2(t)$ $(\alpha(0) \leqslant t \leqslant \alpha(l))$.

При этих предположениях «треугольная модель» оператора A может быть преобразована к виду

$$A_2 f = xf(x) + i\int_a^x f(t)\,\beta_1(t)\,dtI\beta_1(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{4}$$

где $\beta_1(t) = p(t)\,\beta(\sigma(t))$, $a \leqslant t \leqslant b$, $a = \alpha(0)$, $b = \alpha(l)$.

2. Рассмотрим прежде всего случай, когда ранг неэрмитовости оператора A_2 равен 1.

Теорема 1. Если $p^2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ является функцией ограниченной вариации и удовлетворяет условию Липшица $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то оператор

$$A_2 f = xf(x) + ip(x)\int_a^x f(t)\,p(t)\,j\,dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b,\ j = \pm 1) \tag{5}$$

может быть приведен к диагональному виду.

Дополнительная компонента оператора (5) состоит из тех и только тех векторов $f(x) \in L^2[a, b]$, для которых имеет место равенство $f(x)\,p(x) \equiv 0$.

Теорема 2. Представим матрицы $\beta_1(x)$ в виде $\beta_1(x) = p(x)\,\beta(x)$ $(p(x) \equiv S_p\beta_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant b)$. Пусть при любом x лишь N собственных чисел $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_N(x)$ матрицы $\beta(x)$ отлично от нуля и при некотором $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$\lambda_i(x) \geqslant \delta \qquad (a \leqslant x \leqslant b,\ i = 1, 2, \ldots, N).$$

Если, кроме того, при некотором K для любых $x_1, x_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$\left\| \beta_1^2(x_2) - \beta_1^2(x_1) \right\| \leqslant K\,|x_2 - x_1|,$$

то соответствующий оператор

$$A_2 f = xf(x) + i\int_a^x f(t)\,\beta_1(t)\,Idt\beta_1(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b,\ I = \pm I) \tag{9}$$

может быть приведен к диагональному виду.

Дополнительная компонента оператора A_2 (9) состоит из тех и только тех векторов $f(x) \in L_2^2[a, b]$, для которых имеет место равенство $f(x)\,\beta_1(x) \equiv 0$.

3. Теорема 3. Рассмотрим две системы

$$\frac{dw(x, \lambda)}{dx} = iw(x, \lambda)\,\frac{\beta_1^2(x)}{x - \lambda} \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

$$\frac{dw(x, \lambda)}{dx} = iw(x, \lambda)\,\frac{\beta_2^2(x)}{x - \lambda} \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

где $\beta_1(x)$ и $\beta_2(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.

Если вронскианы этих систем совпадают $(w_1(b, \lambda) = w_2(b, \lambda) = w(\lambda))$, то выполняются соотношения

$$v\beta_1(x)\,v^{-1} = \beta_2(x) \ (a \leqslant x \leqslant b), \qquad vw(\lambda)\,v^{-1} = w(\lambda),$$

где v — некоторая постоянная унитарная матрица.

4. Рассмотрим уравнение Шредингера

$$ih \frac{\partial \psi (t)}{\partial t} A\psi, \quad \psi (0) = \psi_0 \, (\psi_0 \in H), \tag{10}$$

где A — оператор класса $i\Omega$ с непрерывным спектром.

Если оператор A удовлетворяет условиям теоремы 2, то каков бы ни был начальный элемент ψ_0, справедливо соотношение:

$$m \| \psi_0 \| \leqslant \| \psi (t) \| \leqslant M \| \psi_0 \|, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

где M и $m \, (M > m > 0)$ — постоянные числа, не зависящие от ψ_0.

Лит.: 1. Birkhoff G. D., Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908) 373—395. 2. Тамаркин Я. Д., Math. Zeitschr. 27 (1927), 1—54. 3. Келдыш М. В., ДАН СССР 87 (1951), 11—14. 4. Мукминов Б. Р., ДАН СССР 99, № 4 (1954), 499—502. 5. Наймарк М. А., Труды Моск. матем. об-ва 3 (1954), 181—271. 6. Лившиц М. С., Матем. сб. 34 (76) : 1 (1954), 145—199.

Д. Ф. Харазов (*Тбилиси*). **О линейных уравнениях с вполне непрерывными операторами, полиномиально зависящими от параметра.** 1. Пусть X — некоторое пространство Гильберта (вообще говоря, комплексное), A_0, A_1 и A_2 — линейные вполне непрерывные операторы, отображающие X в себя. Для уравнения

$$x - A_0 x - \lambda A_1 x - \lambda^2 A_2 x = y, \quad x \in X, \quad y \in X, \tag{1}$$

где λ — комплексный параметр, а операторы $A_i \, (i = 0, 1, 2)$ симметризуемы положительным оператором H, имеет место полный аналог теории Гильберта—Шмидта. Случай самосопряженных операторов $A_i \, (i = 0, 1, 2)$ является частным по отношению к указанному; в этом случае H — оператор тождественного преобразования.

2. Указывается способ приближенного нахождения собственных значений и собственных элементов однородного уравнения, соответствующего уравнению (1).

3. Исследуется множество собственных значений уравнения

$$x - \sum_{k=0}^{m} \lambda^k A_k x = 0, \quad x \in X,$$

где $A_k \, (k = 0, 1, \ldots, m)$ — линейные вполне непрерывные операторы.

4. Известно, что многие задачи математической физики приводят к изучению граничных задач для дифференциальных уравнений с коэффициентами, полиномиально зависящими от параметра. При помощи вышеуказанных результатов изучаются некоторые классы граничных задач для дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и эллиптического типа.

З. И. Халилов (*Баку*). **О дискретности невещественной части спектра несамосопряженного оператора.** 1. Доказывается теорема: для дискретности невещественной части спектра линейного оператора в общем гильбертовом пространстве необходимо и достаточно, чтобы он был представим в виде суммы $A + B$, где A — самосопряженный, $E + R_\lambda B$ (где E — единичный оператор, R_λ — резольвента оператора A), обратим хотя бы в двух точках λ_1, λ_2, $\operatorname{Im} \lambda_1 > 0$, $\operatorname{Im} \lambda_2 < 0$, и представим в виде суммы обратимого и вполне непрерывного (или, что все равно, конечного) операторов.

2. Рассматриваются интегральные, интегро-дифференциальные и дифференциальные операторы в пространстве L_2.

Э. С. Цитланадзе (*Тбилиси*). **Об условном экстремуме и соответствующем функциональном уравнении в гильбертовом пространстве.** Исследуется задача на условный экстремум в гильбертовом функциональном пространстве.

Доказывается существование условно критической точки, а также существование решения соответствующего функционального уравнения Эйлера.

Применяемый метод представляет собой сочетание методов комбинаторной топологии с аналогом прямых методов вариационного исчисления в функциональных пространствах.

СЕКЦИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Н. А. Бородачев (*Москва*). **О структуре некоторых вероятностных совокупностей и процессов, отображающих реальные производственные процессы.** 1. До недавнего времени в технических приложениях теории вероятностей и математической статистики преобладали тенденции сведения распределений всех технических величин к одному-двум теоретическим распределениям и объявления всех существенно уклоняющихся от них практических распределений «анормальными». При этом значительное распространение для чисто внешнего описания таких «анормальных» распределений получили различные интерполяционные системы (кривые Пирсона, ряды Грама-Шарлье, Эджворта и др.).

2. Потребности более углубленного изучения физической сущности явлений, происходящих в реальных производственных процессах, привели к необходимости отказа и от гипотез об универсальных («нормальных») распределениях, и от весьма ограниченных по своим познавательным возможностям описательных интерполяционных систем. В ряде советских и зарубежных работ последних лет рассматривается, наряду с классическими теоретическими распределениями (Гаусса, Пуассона, Максвелла), значительное количество существенно отличных от них теоретических же распределений, схемы образования которых непосредственно связаны с простейшими физическими явлениями, определяющими основные условия возникновения («структуру») рассматриваемых случайных величин.

3. Полученные в указанном новом направлении результаты различных авторов (в частности, изложенные докладчиком в [1] и [2]) относились, главным образом, к частным совокупностям весьма простой структуры, например к отдельным производственным партиям, изготовляемым в условиях нестабильности только одного или двух параметров. Тем не менее они получили уже известное полезное распространение в практических инженерных расчетах.

4. Возрастающие и усложняющиеся потребности технических приложений, в частности связанные с теорией проектирования комплексно автоматизированных производств, требуют распространения нового направления на более сложные задачи, а именно: на величины, характеризующие совокупности, значительно более сложные по своей структуре, например, для производственного процесса в целом — как совокупности теоретически неограниченного количества отдельных, различающихся по своим параметрам, партий; на величины, связанные корреляционными и скедастическими зависимостями; на вероятностные процессы (случайные функции).

В сообщении приводятся примеры некоторых вероятностных совокупностей и процессов такого рода и намечаются задачи и пути дальнейших аналогичных исследований, соответствующих более сложным исходным производственным условиям и более сложным структурам, отображающих их теоретико-вероятностных множеств и процессов.

Лит.: 1. Бородачев Н. А., Труды совещ. по матем. стат., изд. АН УзССР, Ташкент, 1949. 2. Бородачев Н. А., Основные вопросы теории точности производства, Москва, 1950.

Ю. В. Линник (*Ленинград*), **А. А. Зингер** (*Ленинград*). **Некоторые новые результаты о независимых статистиках.** 1. Даются общие постановки задач о независимых, одинаково распределенных и «инвариантных в среднем» (имеющих горизонтальную линию регрессии) статистиках.

2. Приводятся новые результаты о независимости полиномов и выборочного среднего и новые результаты о независимости двух полиномов. Отмечается двойственность в постановках задачи для полиномов и «трубчатых статистик».

3. Сообщаются некоторые результаты об «инвариантных в среднем» статистиках.

Г. М. Мания (*Тбилиси*). **Квадратическая оценка плотности нормального распределения по данным выборки.** Исследуется вопрос о точности приближения плотности нормального распределения с помощью выборочных данных.

Для случая выборок большего объема находится предельное распределение для квадратического отклонения.

Исследованный случай представляет и некоторый общий интерес, так как он выпадает из сферы действия известных предельных теорем.

А. К. Митропольский (*Ленинград*). **О поверхностях распределения типа** A. Корреляционная функция типа A может быть представлена в виде

$$f_A(x, y) = f(x, y) + \sum_{g+h \geqslant 3} c_{gh} \frac{\partial^{g+h} f(x, y)}{\partial x^g \partial y^h}, \tag{1}$$

где x и y — нормированные значения статистических величин, $f(x, y)$ — нормальная корреляционная функция, а коэффициенты c_{gh} равны:

$$\begin{gathered} c_{30} = -\frac{1}{3!\ 0!} r_{3/0}, \qquad c_{21} = -\frac{1}{2!\ 1!} r_{2/1}, \\ c_{12} = -\frac{1}{1!\ 2!} r_{1/2}, \qquad c_{03} = -\frac{1}{0!\ 3!} r_{0/3}, \\ c_{40} = \frac{1}{4!\ 0!} (r_{4/0} - 3), \qquad c_{31} = \frac{1}{3!\ 4!} (r_{3/1} - 3r_{1/1}), \\ c_{22} = \frac{1}{2!\ 2!} (r_{2/2} - 2r_{1/1}^2 - 1), \\ c_{13} = \frac{1}{1!\ 3!} (r_{1/3} - 3r_{1/1}), \qquad c_{04} = \frac{1}{0!\ 4!} (r_{0/4} - 3). \end{gathered} \tag{2}$$

Основная цель работы состоит в вычислении частот корреляционной таблицы типа A.

В. С. Михалевич (*Киев*). **Оптимальные методы статистического приемочного контроля.** Задача об отыскании наиболее экономных способов приемочного статистического контроля в предположении, что объем каждой контролируемой партии изделий достаточно велик, сводится к построению последовательных байесовских решений для биномиального распределения и линейной функции риска. В отличие от обычного вальдовского последовательного выбора между двумя конкурирующими гипотезами (блуждание между двумя параллельными прямыми), эти байесовские решения при широких предположениях об априорном распределении брака по партиям имеют вид многократной урезанной выборки. Изучается аппроксимация этих решений при переходе к процессам с непрерывным временем (к процессам Пуассона и нормальному).

Так как для полученных методов не существует (даже при аппроксимации пуассоновским процессом) несмещенных оценок пропущенного брака, то строятся оценки с минимальным смещением и дисперсией, ограниченной заданным уровнем.

М. С. Пинскер (*Москва*). **Количество информации об одном стационарном случайном процессе, содержащееся в другом стационарном случайном процессе.** Рассматриваются определения количества информации, пропускной способности канала и скорости создания сообщений, совпадающие, при некоторых уточнениях, с определениями, данными в [1] (стр. 7—87).

Количество информации I одного из стационарных случайных гауссовых процессов $\xi(t)$, содержащихся в другом $\zeta(t)$, равно

$$I = \frac{1}{4\pi} \int \log \frac{f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\zeta\zeta}(\lambda)}{f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\zeta\zeta}(\lambda) - |f_{\xi\zeta}(\lambda)|^2} d\lambda, \tag{1}$$

где $f_{\xi\xi}(\lambda)$, $f_{\zeta\zeta}(\lambda)$, $f_{\xi\zeta}(\lambda)$ — производные спектральных функций и взаимной спектральной функции случайных процессов $\xi(t)$ и $\zeta(t)$.

Если $\xi(t)$ и $\zeta(t)$ — входной и выходной сигналы и фиксированы корреляционные функции и взаимная корреляционная функция процессов $\xi(t)$ и $\zeta(t)$, то для пропускной способности канала C имеет место неравенство $C \geqslant I$, где I определено формулой (1).

Если же взаимная корреляционная функция неизвестна, то

$$C \geqslant \frac{1}{4\pi} \int \log \frac{f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\zeta\zeta}(\lambda)}{f^*_{\xi\xi}(\lambda) f^*_{\zeta\zeta}(\lambda)} d\lambda,$$

где

$$f^*_{\xi\xi}(\lambda) = \begin{cases} f_{\xi\xi}(\lambda) \text{ при } f_{\xi\xi}(\lambda) \leqslant f_{\zeta\zeta}(\lambda) \\ f_{\xi\xi}(\lambda) - f_{\zeta\zeta}(\lambda) \text{ при } f_{\xi\xi}(\lambda) > f_{\zeta\zeta}(\lambda). \end{cases}$$

В частности, при $f_{\zeta\zeta}(\lambda) \geqslant f_{\xi\xi}(\lambda)$ наименьшую пропускную способность

$$C = \frac{1}{4\pi} \int \log \left(\frac{f_{\xi\xi}(\lambda)}{f_{\zeta\zeta}(\lambda) - f_{\xi\xi}(\lambda)} + 1 \right) d\lambda$$

имеет канал, в котором шум $\eta(t) = \zeta(t) - \xi(t)$ гауссовский и не зависит от сигнала $\xi(t)$.

Скорость создания сообщений R оценивается неравенством $R \leqslant I$, причем это неравенство превращается в равенство, когда входной сигнал гауссовский. Здесь корреляционная функция выходного сигнала $\zeta(t)$ и взаимная корреляционная функция сигналов $\zeta(t)$ и $\xi(t)$ считаются фиксированными.

Отсюда можно получить оценки для R при эффективном критерии, частотно-взвешенном эффективном критерии и в ряде других критериев верности воспроизведения сообщения.

Лит.: 1. Шэннон К., Сб. статей «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», ИЛ, 1953. 2. Пинскер М. С., ДАН СССР 98, № 2 (1954), 213—217.

В. С. Пугачев (*Москва*). **О преобразовании энтропии случайной функции при линейном преобразовании случайной функции.** Пусть $f_n(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$ — n-мерная плотность вероятности случайной функции $X(t)$. Функция

$$H_x^{(n)}(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= - \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x_1, \ldots, x_n;\ t_1, \ldots, t_n) \lg f_n(x_1, \ldots x_n;\ t_1, \ldots, t_n)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{1}$$

называется n-мерной энтропией случайной функции X. Если аргумент t изменяется в конечной области T, то, выбирая при каждом n точки $t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$ приблизительно равномерно распределенными в области T так, чтобы радиус наибольшего круга, содержащего только одну точку $t_k^{(n)}$ и целиком лежащего в области T, стремился к нулю при $n \to \infty$, определим энтропию на одну степень свободы случайной функции X формулой (см. [1])

$$H_x = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_x^{(n)} \left(t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}\right), \tag{2}$$

если предел в этой формуле существует и не зависит от выбора точек $t_k^{(n)} (n=1, 2, \ldots)$. Для краткости мы будем называть величину H_x просто энтропией случайной функции X.

Целью сообщения является установление соотношения между энтропией случайной функции X и энтропией случайной функции

$$Y = AX, \tag{3}$$

где A — произвольный линейный оператор.

Определим для каждого n значения $t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$, приблизительно равномерно распределенные в области T изменения аргумента t, и построим для каждого n каноническое разложение случайной функции X, точно представляющее ее в точках $t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$. Это разложение будет содержать n членов и будет иметь вид (см. [2]):

$$X\left(t_k^{(n)}\right) = \sum_{r=1}^{n} V_r^{(n)} u_r^{(n)}\left(t_k^{(n)}\right) \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Обозначим случайную функцию, определяемую разложением (4) для всех t в области T, через X_n. Последовательность случайных функций X_n сходится в среднем квадратическом к случайной функции X при всех $t \in T$, если случайная функция X непрерывна [3]. Последовательность случайных функций

$$Y_n = AX_n \tag{5}$$

сходится в среднем квадратическом к случайной функции Y в области T, а последовательность энтропий случайных функций Y_n сходится к энтропии случайной функции Y.

Полагая в (5) $t = t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}$ и подставляя в (5) выражение X_n, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$Y_n\left(t_k^{(n)}\right) = \sum_{r=1}^{n} V_r^{(n)} p_r^{(n)}\left(t_k^{(n)}\right) \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{6}$$

где

$$p_r^{(n)} = Au_r^{(n)} \quad (r = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Уравнения (4) и (6) определяют линейное преобразование случайного вектора с составляющими $X\left(t_1^{(n)}\right), \ldots, X\left(t_n^{(n)}\right)$, дающее в результате случайный вектор с составляющими $Y_n\left(t_1^{(n)}\right), \ldots, Y_n\left(t_n^{(n)}\right)$. Поэтому энтропия случайного вектора $Y_n\left(t_k^{(n)}\right)$ выражается через энтропию случайного вектора $X\left(t_k^{(n)}\right)$ формулой

$$H_{Y_n}^{(n)}\left(t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}\right) = H_x^{(n)}\left(t_1^{(n)}, \ldots, t_n^{(n)}\right) + \lg \frac{\left| p_r^{(n)}\left(t_k^{(n)}\right)\right|_{r,\, k=1, \ldots, n}}{\left| u_r^{(n)}\left(t_k^{(n)}\right)\right|_{r,\, k=1, \ldots, n}}, \tag{8}$$

где $\left| u_r^{(n)}\left(t_k^{(n)}\right)\right|$ и $\left|p_r^{(n)}\left(t_k^{(n)}\right)\right|$ — определители систем уравнений (4) и (6).

Пусть теперь $k(t, \lambda)$ — семейство инвариантных функций оператора A, зависящее от параметра λ, в общем случае комплексного

$$Ak(t, \lambda) = Z(\lambda)\, k(t, \lambda). \tag{9}$$

Функцию $Z(\lambda)$ будем считать непрерывной. Пусть Λ — некоторая конечная область изменения параметра λ. Определим для каждого n приблизительно равномерно распределенные в области Λ значения $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}$ так, чтобы при каждом n

существовало такое разбиение области Λ на n равных частей, при котором в каждую часть попадает только одно из значений $\lambda_k^{(n)}$. Определим функции $u_r^{(n)}$ рекуррентными формулами:

$$u_1^{(n)}(t)=k\left(t,\ \lambda_1^{(n)}\right),\qquad u_r^{(n)}(t)=\sum_{k=1}^{r-1} c_{rk}\,u_k^{(n)}(t)+k\left(t,\ \lambda_r^{(n)}\right)\qquad (r=2,\ldots,n),\tag{10}$$

выбрав коэффициенты c_{rk} так, чтобы разложение (4) было каноническим, что всегда возможно [2]. Тогда будем иметь:

$$\left.\begin{aligned}&\left|u_r^{(n)}\left(t_k^{(n)}\right)\right|_{r,\,k=1,\ldots,n}=\left|k\left(t_p^{(n)},\ \lambda_q^{(n)}\right)\right|_{p,\,q=1,\ldots,n}\\&\left|p_r^{(n)}\left(t_k^{(n)}\right)\right|_{r,\,k=1,\ldots,n}=Z\left(\lambda_1^{(n)}\right)\ldots Z\left(\lambda_n^{(n)}\right)\left|k\left(t_p^{(n)},\ \lambda_q^{(n)}\right)\right|_{p,\,q=1,\ldots,n}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

и формула (8) примет вид:

$$H_{yn}^{(n)}\left(t_1^{(n)},\ldots,t_n^{(n)}\right)=H_x^{(n)}\left(t_1^{(n)},\ldots,t_n^{(n)}\right)+\sum_{r=1}^{n}\lg Z\left(\lambda_r^{(n)}\right).\tag{12}$$

Разделив это равенство на n и переходя к пределу при $n\to\infty$, получим искомое соотношение между энтропиями случайных функций X и Y:

$$H_y=H_x+\frac{1}{\Lambda}\int_{\Lambda}\lg Z(\lambda)\,d\lambda.\tag{13}$$

Эта формула является обобщением формулы Шэннона [1], выведенной им для случая, когда случайные функции X и Y и оператор A стационарны и случайная функция X имеет ограниченный спектр. (Мы называем оператор A стационарным, если соотношение (3) равносильно однородному линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами относительно случайных функций X, Y.) Если A — действительный стационарный оператор, а X — стационарная случайная функция скалярной переменной t, спектральная плотность которой равна нулю вне интервала частот $\omega_1<|\omega|<\omega_2$, то функции $k(t,\ \lambda)$ представляют собой показательные функции $e^{i\omega t}$, область интегрирования Λ (в 13) есть сумма двух симметричных отрезков мнимой оси, а $Z(i\omega)$ является частотной характеристикой оператора A и формула (13) принимает вид:

$$H_y=H_x+\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\lg|Z(i\omega)|\,d\omega.\tag{14}$$

Это — исправленная формула Шэннона. У Шэннона допущена ошибка, вследствие чего изменение энтропии при линейном преобразовании случайной функции у него получилось вдвое большим, чем в действительности.

Лит.: 1 Shannon C. E., Bell. Syst. Techn. Journ., 27 (1948), 379, 623. 2. Пугачев В. С., Элементы теории случайных функций, ВВИА, 1954. 3. Пугачев В. С., Изв. АН СССР, сер. матем. 17 (1953), 401—420.

И. Н. Санов (*Москва*). **О вероятности больших отклонений случайных величин.** Пусть в вероятностной схеме с n исходами $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

$$\begin{pmatrix}a_1, & a_2, & \ldots, & a_n\\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_n\end{pmatrix},\qquad \sum_1^n p_i=1,\qquad p_i>0,\tag{1}$$

проделаны N независимых испытаний и при этом исход a_i появился m_i раз с относительной частотой $\nu_i=\frac{m_i}{N}$.

С помощью тождества

$$\frac{N!}{m_1!\,m_2!\ldots m_n!}\,p_1^{m_1}p_2^{m_2}\ldots p_n^{m_n}=e^{N\sum\limits_1^n \nu_i\ln\frac{p_i}{\nu_i}+R},\qquad R=O(n\ln N),$$

доказывается следующее утверждение. После N независимых испытаний по схеме (1) для любого набора чисел $q_i \geqslant 0$ с $\sum_1^n q_i = 1$ и для любого $\varepsilon > 0$,

$$P(|\nu_1 - q_1| < \varepsilon, \ |\nu_2 - q_2| < \varepsilon, \ldots, \nu_n - q_n| < \varepsilon) =$$
$$= e^{N\left[\sum_1^n q_i \ln \frac{p_i}{q_i} + O\left(2\ln\frac{1}{\varepsilon}\right) + O\left(\frac{\ln N}{N}\right)\right]}.$$

Вводится понятие множества Ω точек $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ с $\sum_1^n q_i = 1$, $q_i \geqslant 0$, «отделимого» от схемы (1).

Пусть задано «отделимое» множество точек Ω. После N независимых испытаний по схеме (1) получаем

$$P((\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) \in \Omega) = e^{N\left[\sup\limits_{x \in \Omega} \sum_1^n x_i \ln \frac{p_i}{x_i} + O(1)\right]}, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Далее, пусть $F(x)$ и $\Phi(x)$ — две функции распределения, причем $F(x)$ является функцией распределения случайной величины ξ, а $\Phi(x)$ является абсолютно непрерывной по $F(x)$.

Пусть $F_N(x)$ — эмпирическая функция распределения, построенная по N независимым наблюдениям случайной величины ξ.

Вводится понятие последовательности V_n-окрестностей функции $\Phi(x)$, F-сходящихся к $\Phi(x)$.

Найдены условия такой сходимости.

Введено определение F-«отделимых» множеств Ω функций распределения.

Для рассматриваемых множеств верны следующие результаты:

$$P(F_N \in V_n) = e^{N\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{dF}{d\Phi} d\Phi + O\left(\frac{n \ln N}{N}\right) + \delta_n\right]}, \qquad (5)$$
$$(\delta_n \to 0).$$

$$P(F_N \in \Omega) = e^{N\left[\sup\limits_{\Phi \in \Omega} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{dF}{d\Phi} d\Phi + o(1)\right]}, \qquad (6)$$

Отсюда получаются в качестве следствия результаты:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{dF}{d\Phi} d\Phi = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{\ln P(\sup\limits_x |F_N(x) - \Phi(x)| < \varepsilon)}{N}. \qquad (7)$$

Для $F(x) = x$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ получаем вероятностное определение энтропии в общем случае:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{d\Phi}{dx} d\Phi = -\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{N \to \infty} \frac{\ln P(\sup\limits_x |F_N(x) - \Phi(x)| < \varepsilon)}{N}. \qquad (8)$$

Полученные теоремы применимы ко многим задачам вычисления вероятностей больших отклонений. Например, пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ — одинаково распределенные независимые случайные величины с общей функцией распределения $F(x)$. Пусть $\alpha > M\xi_i$. Тогда при изучении $P\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N}{N} > \alpha\right)$ величину $\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N}{N}$ можно рассматривать как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x dF_N(x)$:

$$P\left(\frac{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_N}{N}\geqslant\alpha\right)=P\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\,dF_N(x)\geqslant\alpha\right)=P\left(F_N(x)\in\Omega_\alpha\right),\qquad(9)$$

где $\Omega_\alpha F$ — «отделимое» множество таких функций распределения $\Phi(x)$, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\,d\Phi(x)\geqslant\alpha$.

Приведенные в докладе результаты можно рассматривать как некоторое дополнение к известным результатам по теории больших отклонений, полученным Н. В. Смирновым, Г. Крамером, В. В. Петровым и др.

О. В. Сарманов (*Ленинград*). **Предельное дискретное распределение для двузначной неоднородной цепи Маркова.** 1. Рассмотрим неограниченную последовательность серий испытаний (с двумя исходами A и $\overline{A}$), связанных в простую неоднородную цепь Маркова. Пусть $p_1^{(n)}$ — вероятность A в первом испытании n-й серии, $\alpha_k^{(n)}$ и $\beta_k^{(n)}$ — вероятности перехода соответственно от A и $\overline{A}$ в $k-1$-м испытании к A в k-м испытании, $P_s^{(n)}$ — вероятность s-кратного появления A в серии из n испытаний,

Мы говорим, что существует дискретное предельное распределение вероятностей, если при всех $s=0,\ 1,\ 2,\ldots$ существуют пределы

$$\lim_{n=\infty}P_s^{(n)}=P_s,\qquad(1)$$

причем выполняется условие

$$\sum_{s=0}^{\infty}P_s=1.\qquad(2)$$

2. Справедлива следующая теорема.

При соблюдении двух предварительных условий

$$\lim_{n\to\infty}p_1^{(n)}=p_1,\qquad(3)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{2\leqslant k\leqslant n}\beta_k^{(n)}=0,\qquad(4)$$

для выполнения (1) необходимо и достаточно существование следующих пределов:

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_k^{(n)}=\alpha_k,\qquad k=2,\ 3,\ldots,\qquad(5)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n}\beta_i^{(n)}=\gamma,\qquad(6)$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=2}^{n-k}\beta_i^{(n)}\alpha_{i+1}^{(n)}\ldots\alpha_{i+k}^{(n)}=\hat{\alpha}_2\cdot\hat{\alpha}_3\ldots\hat{\alpha}_{k+1}\gamma,\qquad(7)$$

причем для выполнения условия (2) (при всех p_1) необходимо и достаточно соблюдение условий:

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_2\cdot\alpha_3\ldots\alpha_k=0,\qquad(8)$$

$$\lim_{k\to\infty}\hat{\alpha}_2\cdot\hat{\alpha}_3\ldots\hat{\alpha}_k=0.\qquad(9)$$

3. Предельное распределение имеет следующий вид:

$$P_0=(1-p_1)\,e^{-\gamma},$$

$$P_s=e^{-\gamma}\left[p_1\left(\delta_s+\sum_{k=1}^{s-1}R_{s,k}\cdot\frac{\gamma^k}{k!}\right)+(1-p_1)\sum_{k=1}^{s}Q_{s,k}\frac{\gamma^k}{k!}\right],\qquad s=1,\ 2,\ldots,$$

где

$$Q_{s,k}=\sum{}' \frac{k!}{k_1!\,k_2!\dots k_l!}\,\tilde{\delta}_{r_1}^{k_1}\cdot\tilde{\delta}_{r_2}^{k_2}\dots\tilde{\delta}_{r_l}^{k_l},$$

$$R_{s,k}=\sum{}'' \frac{k!}{k_1!\,k_2!\dots k_l!}\,\delta_{l_0}\cdot\tilde{\delta}_{r_1}^{k_1}\tilde{\delta}_{r_2}^{k_2}\dots\tilde{\delta}_{r_l}^{k_l},$$

причем знак Σ' означает суммирование с соблюдением трех условий:

$$k_1+k_2+\dots+k_l=k, \quad k_1r_1+k_2r_2+\dots+k_lr_l=m, \quad r_i\neq r_j$$

(k_i, r_i — целые положительные числа), знак Σ'' означает суммирование с соблюдением трех аналогичных условий:

$$k_1+k_2+\dots+k_l=k, \quad l_0+k_1r_1+k_2r_2+\dots+k_lr_l=m, \quad r_i\neq r_j$$

(l_0 — целое положительное число),

$$\tilde{\delta}_i=1-\tilde{\alpha}_2, \quad \delta_1=1-\alpha_2,$$

$$\tilde{\delta}_i=\tilde{\alpha}_2\cdot\tilde{\alpha}_3\dots\tilde{\alpha}_i(1-\alpha_{i+1}), \quad \delta_i=\alpha_2\cdot\alpha_3\dots\alpha_i(1-\alpha_{i+1}), \quad i=2,3,4,\dots$$

4. Характеристическая функция предельного распределения имеет вид:

$$\varphi(t)=[1+p_1(e^{it}-1)\,\Phi(it)]\cdot\exp[\gamma(e^{it}-1)\,\tilde{\Phi}(it)],$$

где

$$\Phi(it)=1+\sum_{k=2}^{\infty}e^{i(k-1)t}\cdot\prod_{\lambda=2}^{k}\alpha_\lambda, \qquad \tilde{\Phi}(it)=1+\sum_{k=2}^{\infty}e^{i(k-1)t}\prod_{\lambda=2}^{k}\tilde{\alpha}_\lambda.$$

5. Для однородной цепи, когда $\alpha_k^{(n)}=\alpha^{(n)}$, $\beta_k^{(n)}=\beta^{(n)}$ $(2\leqslant k\leqslant n)$, характеристическая функция имеет вид:

$$\varphi(t)=\left(1+p_1\frac{e^{it}-1}{1-\alpha e^{it}}\right)\cdot\exp\gamma\frac{e^{it}-1}{1-\alpha e^{it}},$$

где

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\alpha^{(n)} \quad (\alpha<1), \quad \gamma=\lim_{n\to\infty}(n-1)\,\beta^{(n)}.$$

6. Производящая функция $\psi(t)=\sum\limits_{s=0}^{\infty}P_s\cdot t^s$ указанного предельного распределения для неоднородной цепи была найдена ранее в работе [1] с помощью целого ряда дополнительных предположений, не являющихся необходимыми; предельное распределение для однородной цепи приводится в работах [1], [2].

Лит.: 1. Koopman, B. O., Trans. Amer. Mat. Soc. **70**, № 2 (1951). 2. Добрушин Р. Л., Изв. АН СССР, сер. матем. **17** (1953), 291—330.

Т. А. Сарымсаков (*Ташкент*). **О предельных теоремах для неоднородных цепей Маркова.** Показывается, что основная предельная теорема и некоторые другие предельные теоремы для неоднородных цепей Маркова справедливы в условиях, отличных от известных в литературе.

Формулируемые в настоящем сообщении условия, при которых устанавливаются указанные выше предельные теоремы, основываются, главным образом, на результатах статьи [1].

Лит.: 1. Сарымсаков Т. А., ДАН СССР, 90, № 1 (1953).

В. Г. Срагович (*Москва*). **Вероятностное построение статистики нестационарных систем.** Нестационарной системой мы называем систему, порожденную исходными частицами $m\ (\geqslant 2)$ типов $A_1, A_2, \dots, A_m$, которые могут образовывать составные частицы $n\ (\geqslant 1)$ типов $\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_n$, где $\mathfrak{M}_i=A_1^{k_1^i}\cdot A_2^{k_2^i}\dots A_m^{k_m^i}$ состоит из K_1^i атомов A_1, k_2^i атомов A_2 и т. д.

Полная энергия системы $\mathscr{E}$ постоянна и складывается из энергий составляющих ее исходных и составных частиц всех возможных типов. Количество частиц каждого из типов и их суммарная энергия являются случайными величинами.

Распространенной физической интерпретацией нестационарной системы служит совокупность атомов реагирующих химических элементов (это — исходные частицы) и молекул, продуктов реакции (это — составные частицы). Составляющие систему частицы, как «атомы», так и «молекулы», могут принадлежать любой из трех статистических схем, употребляемых в квантовой механике.

В докладе дается обоснование статистической теории нестационарных систем на основе метода А. Я. Хинчина. Одна из важнейших задач обоснования состоит в выводе асимптотических оценок средних значений различных физических величин. Главную роль играет при этом структурная функция, означающая число измерений многообразия собственных функций оператора энергии системы, отвечающих собственному значению $\mathscr{E}$. Если система содержит частицы, подчиняющиеся «новым» статистикам (симметрической и антисимметрической), то в этом многообразии рассматриваются лишь функции симметрические и антисимметрические по соответствующим индексам.

Первая часть доклада посвящена центральному пункту метода асимптотической оценки структурной функции. Сама оценка получается применением многомерной локальной предельной теоремы для решетчатых распределений.

Во второй части доклада излагается построение статистики нестационарных систем. Здесь, прежде всего, находятся предельные формы законов распределения чисел заполнения частиц различных типов. Числа заполнения частиц, подчиняющихся полной статистике (схема Максвелла—Больцмана), распределены по закону Пуассона. Если частица управляется симметрической статистикой (схема Бозе—Эйнштейна), то числа заполнения распределены по геометрическому (показательному) закону. Наконец, для частиц, описываемых антисимметрической статистикой (схема Ферми—Дирака), распределение чисел заполнения сосредоточено в двух точках. Эти результаты позволяют непосредственно написать асимптотические оценки средних значений и дисперсий чисел заполнения частиц различных типов, которые преимущественно и интересуют квантовую статистику. Приводится оценка среднего значения сумматорных величин.

Обозначим через $X_1, X_2, \ldots, X_m$ количества свободных атомов типов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, через $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — количества молекул типов $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$. Энергии соответствующих компонент будут $e_{A_1}, e_{A_2}, \ldots, e_{A_m}, e_{\mathfrak{M}_1}, e_{\mathfrak{M}_2}, \ldots, e_{\mathfrak{M}_n}$. Среди введенных $2(m+n)$ величин имеется $(m+2n-1)$-независимых $\left(\text{например, } M_1, \ldots, M_n, e_{A_1}, \ldots, e_{A_m}, e_{\mathfrak{M}_1}, \ldots, e_{\mathfrak{M}_{n-1}}\right)$. Доказывается, что их совместным распределением является $(m+2n-1)$-мерный невырожденный нормальный закон, и вычисляются его параметры.

В заключение обсуждается связь рассмотренной статистической теории с термодинамикой.

В. А. Статулявичус (*Ленинград*). **Локальная предельная теорема для неоднородных цепей Маркова.** Изучается применимость многомерной локальной теоремы к неоднородным цепям Маркова с конечным числом $s > 1$ возможных состояний $e_1, \ldots, e_s$ и вероятностями перехода $p_{\alpha\beta}^{(k)}$ из состояния e_α в $k-1$-м шагу в состояние e_β в k-м шагу.

Пусть случайная величина $\zeta_n^{(\alpha)}$ означает число попаданий в состояние e_α за первые n шагов. Тогда для вероятности $P_\gamma(m)$ случайному вектору $\zeta_n = \left(\zeta_n^{(1)}, \ldots, \zeta_n^{(s)}\right)$ принять значение $m = (m_1, \ldots, m_s)$, при условии, что e_γ есть начальное состояние, справедлива следующая

Теорема. Если соблюдены условия:

A) $p_{\alpha\beta}^{(k)} \geqslant \lambda p_{\alpha\beta}^{(l)}$ для любых α, β, k, l, где постоянная $\lambda > 0$,

B) множество состояний цепи образует один существенный класс,

C) ранг цепи r равен s, то для любого γ равномерно по $(m_1, \ldots, m_s)$ в области

$|m_\alpha - E_n^{(\alpha)}| < C\sqrt{D_n^{(\alpha)}}$, $\alpha = 1, \ldots, s$ ($C > 0$ — любое фиксированное число) при $n = m_1 + \ldots + m_s \to \infty$

$$P_\gamma(m) = g_{s-1}(m) + O\left(n^{-\frac{s}{2}}\right),$$

где

$$g_{s-1}(m) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}Q^{-1}\left(\frac{m_1 - E_n^{(1)}}{\sqrt{D_n^{(1)}}}, \ldots, \frac{m_{s-1} - E_n^{(s-1)}}{\sqrt{D_n^{(s-1)}}}\right)\right\}}{\sqrt{(2\pi)^{s-1} D_n^{(1)} \ldots D_n^{(s-1)} \Delta_n}},$$

$E_n^{(\alpha)} \asymp n$, $D_n^{(\alpha)} \asymp n$, квадратичная форма $Q(x_1, \ldots, x_{s-1})$ положительно определенная и Δ_n — определитель этой формы.

Если условие С) нарушено, но $r > 1$, то

$$P_\gamma(m) = g_{r-1}(m) + O\left(n^{-\frac{r}{2}}\right).$$

Изучается также случай нарушения условия В) и некоторые ослабления условия А).

С. Х. Туманян (*Ереван*). **О мощности критерия χ^2 по отношению к «близким» альтернативам.** Рассматривается вопрос о предельном распределении величины

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$$

при $n \to \infty$ в случае, когда $Mm_i = np_i'$, $p_i' - p_i = \frac{z_i}{\sqrt{n}}$, z_i ($i = 1, 2, \ldots, s$) — постоянные.

Далее рассматривается вопрос о стремлении к нормальному распределению соответствующим образом нормированной и центрированной величины χ^2 при одновременном безграничном возрастании объема наблюдений n и числа групп s в указанном выше случае.

М. И. Эйдельнант (*Ташкент*). **Применение теории решающих функций для построения стандартных планов приемочного контроля.** Показано, как, опираясь на теорию решающих функций Вальда и предложенный А. Н. Колмогоровым метод последовательных оценок, можно, исходя из конкретного вида рисковых функций, найти оптимальный план контроля, сводящий к минимуму сумму потерь. В практических применениях, если будут изготовлены все необходимые таблицы, отыскание оптимального метода для каждого отдельного случая сведется к небольшому числу элементарных вычислительных операций.

Получены общие формулы и «программа» для составления этих таблиц. Всего нужно составить примерно 400—600 табличек для каждого типа контрольных планов.

СЕКЦИЯ ТОПОЛОГИИ

М. Ф. Бокштейн (*Москва*). **О гомологической размерности топологических пространств.** Гомологическая размерность бикомпактного топологического пространства зависит не только от самого пространства, но и от той группы, которая принята за поле коэффициентов. Если ограничиться бикомпактными группами коэффициентов, то вместо рассматриваемой П. С. Александровым обычной гомологической размерности можно воспользоваться двойственным понятием ∇-гомологической размерности, где обычные циклы заменены коциклами (∇-циклами). Тогда в качестве полей коэффициентов можно брать обычные дискретные аддитивные абелевы группы.

В докладе показывается, что для ∇-гомологической размерности существует счетная полная система полей коэффициентов. Это значит, что для возможности вычисления ∇-гомологической размерности некоторого бикомпакта по любому полю коэффициентов достаточно задать значения его ∇-гомологической размерности по всем группам этой системы. Полная система полей коэффициентов состоит из следующих групп:

1) аддитивной группы R всех рациональных чисел;

2) аддитивных групп R_p рациональных чисел, представимых дробями, в знаменатели которых не входит множителем простое число p;

3) циклических групп C_p простых порядков p;

4) квази-циклических групп Q_p, т. е. приведенных по модулю 1 аддитивных групп рациональных дробей, знаменатели которых суть степени простого числа p.

Далее изучается поведение ∇-гомологической размерности при топологическом перемножении пространств. Как было показано Л. С. Понтрягиным, урысоновская размерность топологического произведения не определяется ее значениями для сомножителей. Оказывается, что знание ∇-гомологической размерности двух бикомпактов по всем полям коэффициентов из вышеприведенной полной системы уже позволяет вычислить ∇-гомологическую размерность их топологического произведения по всем этим полям коэффициентов, а потому и вообще по всем возможным полям коэффициентов (в частности, его урысоновскую размерность, являющуюся ∇-гомологической размерностью по группе целых чисел).

И. И. Гордон (*Горький*). **О непрерывных функциях, определенных на сфере.** В 1933 г. К. Борсук доказал, что при непрерывном отображении n-мерной сферы в n-мерное эвклидово пространство R^n существует, по крайней мере, одна пара диаметрально противоположных точек сферы, переходящих в одну точку пространства R^n. За последние пятнадцать лет появилась серия работ, посвященных обобщениям теоремы Борсука в различных направлениях и исследованиям сходных вопросов (работа Хопфа, Какутани, Ямабе и Юджобо и др.). В частности, Какутани доказал, что если S^2 — двумерная сфера с центром 0, $f(x)$ — заданная на ней непрерывная действительная функция, то на сфере S^2 существуют такие три точки x_1, x_2, x_3, что векторы OX_1, OX_2, OX_3 попарно ортогональны и что

$$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3).$$

При помощи метода Ямабе и Юджобо доказывается более общая

Теорема I. Какова бы ни была непрерывная действительная функция $f(x)$, определенная на сфере S^2, и каков бы ни был равнобедренный треугольник $\triangle_0$ этой сферы, существует конгруентный с $\triangle_0$ треугольник $\triangle$, в вершинах которого значения функции $f(x)$ равны. Доказательство см. в [1].

Вопрос о распространении этой теоремы на случай любого (разностороннего) треугольника, а также обобщение на случай многомерной сферы остается открытым.

Аналогичным методом доказывается

Теорема II. Пусть R^n — n-мерное пространство, 0 — точка в нем, C — простая замкнутая кривая, симметричная относительно точки 0, θ — произвольный угол, $0 < \theta \leqslant 90$. Тогда на C существуют четыре точки, представляющие вершины прямоугольника с центром в 0 и с углом между диагоналями θ.

При помощи теоремы II и известной теоремы Л. С. Понтрягина о снятии цикла [2], получается простое доказательство следующей теоремы, принадлежащей Ливсэю и доказанной им существенно иначе: какова бы ни была непрерывная функция f, заданная на сфере S^2 с центром 0, и каков бы ни был угол θ, $0 < \theta \leqslant 90°$ существует вписанный в сферу S^2 прямоугольник с центром в 0 и с углом между диагоналями θ, в вершинах которого значения функции f равны.

Подробную библиографию см. в [3].

Лит.: 1. Гордон И. И., Усп. матем. наук **10**, вып. 1(63), (1955), 97—99. 2. Понтрягин Л. С., Усп. матем. наук **2**, вып. 2(18), (1947), 44. 3. Yang C. T., Ann. of Math., v. 62, N 2, (1955), 291—292.

В. А. Ефремович (*Иваново*). **Свойства близости в многообразиях.** Пространства близости появились в период между Вторым съездом математиков и Международной топологической конференцией (1935 г.), но по не зависящим от автора обстоятельствам появились в печати только после войны. Пространством близости называется множество элементов (точек), в котором введено отношение близости, именно: для каждых двух подмножеств A и B указано, считаются они близкими или нет ($A\sigma B$ или $A\bar{\sigma}B$). При этом предполагается выполнение некоторых простых условий (аксиом близости). Два пространства близости называются эквиморфными, если между их точками существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение близости (эквиморфизм). Каждое метрическое пространство автоматически является пространством близости в силу постоянного условия: соотношения $A\sigma B$ и $\rho(A, B)=0$ равносильны. Здесь эквиморфизм оказывается взаимно однозначным и в обе стороны равномерно непрерывным соответствием. Свойства близости (иначе, инфинитезимальные свойства) определяются как свойства, опирающиеся лишь на одно отношение — отношение близости множеств.

После всесоюзной топологической конференции (1950 г.) пространства близости привлекли внимание ряда математиков. Работа Н. С. Рамма и А. С. Шварца убедительно показала целесообразность систематического применения понятия близости в некоторых вопросах абстрактной топологии (например, в теории топологических расширений). Однако заслуживает внимания не только абстрактная теория пространств близости, но в не меньшей степени и теория, изучающая свойства близости более специальных геометрических объектов: метрических и геодезических пространств и, в особенности, инфинитезимальных многообразий. Между тем, например, в изучении свойств близости метрических пространств сделано мало, даже проблема метризации пространств близости все еще ждет своего решения. Важным классом метрических пространств являются геодезические пространства («многообразия с внутренней метрикой») — это полные метрические пространства, у которых для каждой пары точек существует хотя бы одна «средняя» точка. Для таких пространств каждый эквиморфизм в существенном удовлетворяет условию Липшица.

То место, какое в топологии занимает топология многообразий, здесь в геометрии близости должно быть отведено теории инфинитезимальных многообразий. Так будем называть пространство близости, эквиморфное риманову многообразию без особенностей, удовлетворяющему условию инфинитезимальной однородности (для каждой точки x существует окрестность U_x, взаимно однозначно и взаимно равностепенно непрерывно отображающаяся на шар постоянного радиуса).

Важной задачей при изучении таких многообразий является задача построения достаточно сильной и разветвленной системы инвариантов, позволяющих практически различать многообразия по их свойствам близости. До последнего времени были исследованы наиболее простые инварианты и прежде всего так называемый объемный инвариант — это порядок роста объема шара радиуса r при $r \to \infty$. Уже этот грубый инвариант во многих случаях дает интересные результаты. Например, неэквиморфность пространств Эвклида E^n и Лобачевского H^n, $n \geqslant 2$, а также следующий факт: плоскость Лобачевского не может быть эквиморфно отображена в эвклидово пространство любого числа измерений. Заметим, что пространство Лобачевского является, так сказать, естественным полем, где достаточно полно могут проявляться свойства близости; наоборот, эвклидово пространство для этого, можно сказать, слишком узко. Поэтому известный интерес представляют работы Р. Ходовой, посвященные изучению, казалось бы, слишком специального вопроса — о свойствах близости в пространстве Лобачевского. Значительно более сильными оказываются гомологические инварианты, построенные в последнее время; им на съезде посвящен особый доклад («Равномерные гомологии» В. Ефремович и Е. Тихомирова). Изучению свойств близости некоторых конкретных многообразий посвящены работы Д. Захарова и Е. Тихомировой. Д. Захаров исследовал многообразия с точки зрения инфинитезимальной изотопии.

Второй важной задачей мне представляется задача инфинитезимального изучения равномерно непрерывных отображений многообразий. Здесь пока сделано очень мало. А. Шварцем доказана общая теорема, дающая оценку меры образа всякого вполне ограниченного множества при данном равномерно непрерывном отображении. Сюда же относится сказанное ранее об отображениях геодезических пространств. Н. Яруткиным решена одна поставленная Л. Понтрягиным задача об инфинитезимально гомотопической классификации равномерно непрерывных отображений, задача, которую удалось сильно обобщить на случай отображения односвязных пространств на замкнутые римановы многообразия отрицательной кривизны. А. Шварцем произведена инфинитезимальная классификация линейных преобразований трехмерного эвклидова пространства.

Наконец, упомяну о приложениях к топологии замкнутых многообразий. Пусть M — замкнутое риманово многообразие; обозначим через $\tilde{M}$ его универсальное накрывающее многообразие. Если M гомеоморфно M', то, как нетрудно видеть, $\tilde{M}$ эквиморфно $\tilde{M}'$. Таким образом, инфинитезимальная структура универсального накрывающего является топологическим инвариантом данного замкнутого многообразия. Возникает задача — выяснить, как этот новый топологический инвариант связан с другими топологическими инвариантами. Для объемного инварианта универсального накрывающего А. Шварцем установлено, что этот объемный инвариант полностью определяется алгебраической структурой фундаментальной группы (см. доклад «Объемный инвариант накрывающих»).

Лит.: 1. Ефремович В., Успехи матем. наук **4**, 2 (1949), 178—179. 2. Ефремович В., ДАН СССР **86**, 3, (1951), 341—343. 3. Ефремович В., Матем. сб., 31 : 1, (1952), 189—200. 4. Ефремович В., Успехи матем. наук, 8, 5, (1953), 189—191. 5. Ефремович В., Уч. зап. ИГПИ **5**, (1954), 3—8. 6. Рамм Н., Шварц А., Матем. сб., 33 : 1 (1953), 157—180. 7. Шварц А., ДАН СССР **105**, 1 (1955), 32—34. 8. Тихомирова Е., Успехи матем. наук 9, 1(1954), 121—123. 9. Захаров Д., Уч. зап. ИГПИ, (1956). 10. Яруткин Н., Уч. зап. ИГПИ, **5** (1954), 32—36. 11. Ходова Р., Уч. зап. ИГПИ, (1956).

Л. М. Лихтенбаум (*Москва*). **Характеристические числа неособенного графа.** Неособенными называются конечные графы, у которых каждое ребро инцидентно двум вершинам, две вершины инцидентны, самое большее, одному ребру.

Пусть K — неособенный граф с вершинами $a_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, \ldots; \alpha^{(0)})$. Если $a_i^{(0)}$ и $a_j^{(0)}$ — такие вершины графа K, что K содержит ребро, инцидентное им обеим, то $a_i^{(0)}$ и $a_j^{(0)}$ называются соседними вершинами или соседями.

Матрицей соседства графа K называется квадратная симметрическая матрица

$$(a_{ij})$$

порядка $\alpha^{(0)}$, причем $a_{ii}=0$, $a_{ij}=1$, если $a_i^{(0)}$ и $a_j^{(0)}$ являются соседями, и $a_{ij}=0$ в противном случае.

Характеристические числа матрицы

$$(a_{ij})$$

называются характеристическими числами графа K.

Рассматриваются матрицы

$$(a_{ij})^p \quad (p=1, 2, \ldots);$$

истолковывается геометрический смысл их элементов, а также миноров и детерминантных делителей матрицы

$$(a_{ij}).$$

Обозначим через $\sigma_i^{(1)}$ число соседей вершины $a_i^{(0)}$. Пусть $a_{i_1}^{(0)}$, $a_{i_2}^{(0)} \ldots a_{i_q}^{(0)}$— какое-либо сочетание вершин графа K, $(q=2, 3, \ldots \alpha^{(0)}-1)$.

Обозначим через $\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_q}^{(q)}$ число общих соседей вершин $a_{i_1}^{(0)}$, $a_{i_2}^{(0)} \ldots a_{i_q}^{(0)}$. Положим

$$\sigma^{(1)} = \sum_{i=1}^{\alpha^{(0)}} \sigma_i^{(1)}, \qquad \sigma^{(q)} = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_q} \sigma_{i_1, i_2 \ldots i_q}^{(p)}$$

(суммирование по всем сочетаниям из $\alpha^{(0)}$ элементов по q).

Дается способ вычисления характеристических чисел графа K по заданным числам $\alpha^{(0)}$, $\sigma^{(s)}$, $(s=1, 2, \ldots, \alpha^{(0)}-1)$.

Пусть S^n $(n=1, 2, \ldots)$ такой подраф графа K с $n+1$ вершинами, что для любых двух вершин подграф $S^{(n)}$ содержит инцидентное им ребро. Доказывается, что если граф K содержит подграф $S^{(n)}$, то по меньшей мере n характеристических чисел графа K равны 1. Исследуются другие подграфы графа K с минорами элементов матрицы соседства, равными 1, что позволяет уточнить число характеристических чисел графа K, равных 1.

Ю. М. Смирнов (*Москва*). **О расширениях топологических пространств.** Каждая вейлевская равномерная структура, определенная на данном вполне регулярном пространстве, определяет некоторое вполне регулярное расширение этого пространства, а именно — пополнение равномерного пространства, определенного данной структурой. Всякое бикомпактное расширение может быть таким образом получено. Однако в общем случае это уже не так. Дается следующее обобщение вейлевской равномерной структуры, устраняющее это несоответствие.

Систему Σ покрытий вполне регулярного пространства R назовем равномерной, если выполнены следующие три условия:

С1. Если покрытие $\alpha \in \Sigma$ вписано в покрытие β, то и $\beta \in \Sigma$.

С2. Если и покрытие $\alpha \in \Sigma$, и покрытие $\beta \in \Sigma$, то и покрытие $\alpha \wedge \beta$, состоящее из попарных пересечений $A \cap B$, где $A \in \alpha$, а $B \in \beta$, также принадлежит Σ.

С3. Для любого покрытия $\alpha \in \Sigma$ и для любого множества $M \subseteq R$ в структуре Σ можно отыскать такое покрытие $\beta \in \Sigma$, что $U_\beta U_\beta M \subseteq U_\alpha M$ (для любого множества E и любого покрытия γ множество $U_\gamma E$, по определению, есть сумма всех элементов покрытия γ, пересекающихся с E).

Ю. М. Смирнов (*Москва*). **О метризуемости локально-компактных пространств, разлагаемых в сумму счетного числа множеств со счетной базой.** В 1929 г. в своем известном совместном мемуаре П. С. Александров и П. С. Урысон поставили вопросы: существует ли такой неметризуемый бикомпакт, у которого как открытое множество всех его точек метризуемости (т. е. имеющих метризуемую окрестность), так и дополнительное к нему замкнутое множество обладают счетной базой? Можно ли неметризуемый бикомпакт разложить в сумму открытого и замкнутого множеств со счетной базой?

Отрицательный ответ на оба вопроса дается следующей недавно найденной мною теоремой.

Всякое локально-компактное регулярное пространство, разлагаемое в сумму счетного или конечного числа произвольного рода множеств со счетной базой, также обладает счетной базой и, следовательно, метризуемо.

Таким образом, в локально-компактных пространствах свойство иметь счетную базу оказывается счетно-аддитивным. Без требования локальной компактности это уже не так, даже для замкнутых слагаемых.

А. И. Фет (*Новосибирск*). **Вариационное исчисление в целом.** Исследования по вариационному исчислению в целом берут свое начало от работ Пуанкаре, который пытался доказать существование трех замкнутых геодезических на замкнутой поверхности рода нуль. Неточные рассуждения Пуанкаре были усовершенствованы и развиты американцами Дж. Д. Биркгофом и, особенно, М. Морсом, развившим аналитические методы вариационного исчисления в целом. В СССР Люстерником и Шнирельманом было основано другое направление в вариационном исчислении, существенной чертой которого является использование гомотопических методов (1929 г.), а затем—метода верхних гомологий в сочетании с гомотопическими методами (Л. А. Люстерник, 1943 г.). Этими методами была впервые полностью решена задача о трех геодезических, впоследствии же Л. А. Люстерник доказал соответствующую теорему об $n+1$ геодезической для n-мерной сферы, а также существование бесконечного множества решений задачи с закрепленными концами на сферическом многообразии.

Попутно развивались методы топологии функциональных пространств кривых с закрепленными концами и замкнутых кривых (М. Морс, Л. А. Люстерник). Эти исследования, продолженные впоследствии А. И. Фетом (1948 г.) и А. С. Шварцем (1955—1956 гг.), не докладываются здесь подробно, так как А. С. Шварц сделает о них отдельное сообщение.

Применение некоторых простых свойств гомотопических групп позволило Л. А. Люстернику и докладчику доказать существование двух решений задачи с закрепленными концами и одной замкнутой геодезической на л ю б о м замкнутом многообразии (1951 г.). Метод подробно изложен в работе докладчика в Матем. сборнике (1952 г.). Для задачи с закрепленными концами Серр в том же 1951 г. доказал существование бесконечного числа решений.

Для периодической задачи на сферическом многообразии в известном смысле законченные результаты получил ученик А. И. Фета С. И. Альбер (1954 г.); метод его работы опирается на работу Л. А. Люстерника (1943 г.) (∇-циклы) и на исследования Л. С. Понтрягина по гомологической теории многообразий (метод этот в докладе кратко излагается).

А. С. Шварц (*Москва*). **Объемный инвариант накрывающих.** Универсальные накрывающие пространства двух геомеоморфных компактных римановых многообразий эквиморфны и, следовательно, имеют одинаковый объемный инвариант в смысле В. А. Ефремовича (см. [1]). Таким образом, объемный инвариант универсального накрывающего является топологическим инвариантом компактного риманова многообразия. В. А. Ефремовичем была поставлена задача: выяснить, в каком отношении находится этот инвариант к известным ранее топологическим инвариантам.

Доказывается, что фундаментальная группа компактного риманова многообразия полностью определяет объемный инвариант универсального накрывающего. В качестве приложения показывается, что фундаментальная группа n-мерного компактного риманова многообразия неположительной кривизны не может быть абелевой группой ранга, меньшего n.

Л и т.: 1. Е ф р е м о в и ч В. А., Усп. матем. наук VII, вып. 5, (1953). 2. Ш в а р ц А. С., ДАН СССР **104**, № 1, (1955).

СЕКЦИЯ ГЕОМЕТРИИ

Н. Д. Айзенштат (*Москва*), **И. А. Вайнштейн** (*Москва*), **М. А. Крейнес** (*Москва*). **О номографировании функций, заданных на сетке.** 1. Понятие номографируемости функции.

2. Построение примеров неномографируемых функций. Некоторые условия номографируемости.

3. Построение последовательности номографируемых функций, сходящихся к неномографируемой.

4. Об одном приборе для приближенного номографирования.

И. Я. Бакельман (*Ленинград*). **Оценки деформаций выпуклых поверхностей.** 1. Задачу о получении оценок деформаций радиуса-вектора поверхности вместе со вторыми производными для регулярных выпуклых поверхностей и поверхностей с краем можно свести к получению оценок изменения решений дифференциальных уравнений Монжа—Ампера эллиптического типа в зависимости от характера изменения коэффициентов уравнения. (В случае поверхности с краем учитываются также изменения краевых условий.)

2. Устанавливается теорема для общих уравнений

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t)=0 \tag{1}$$

эллиптического типа, заданных либо на единичной сфере, либо в круге на плоскости x, y при соответствующих граничных условиях, позволяющая оценить изменение решения уравнения (1) вместе с его вторыми производными в зависимости от характера изменения коэффициентов этого уравнения (а в случае круга — и граничных условий). Из этой теоремы с помощью ряда геометрических соображений получаются оценки деформаций радиуса-вектора и его вторых производных регулярной замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения внутренней метрики поверхности и аналогичные оценки для поверхности с краем в зависимости от изменения внутренней метрики и граничных условий.

С. В. Бахвалов (*Москва*) **и Н. П. Жидков** (*Москва*). **Приближенное решение прямой геодезической задачи.** Под «прямой геодезической задачей» понимается задача определения на эллипсоиде вращения географических координат конечной точки дуги геодезической по географическим координатам начальной точки, азимуту геодезической в начальной точке и длине дуги.

В работе рассматривается новый метод приближенного решения этой задачи с большой степенью точности для любых расстояний.

Длина дуги геодезической определяется по формуле

$$\frac{s}{a}=\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\cos\theta\sqrt{1-\lambda^2\cos^2\theta}}{\sqrt{\cos^2\theta-\cos^2 t}}\,d\theta, \tag{1}$$

где θ — приведенная широта, θ_0 — приведенная широта начальной точки дуги геодезической, t — приведенная широта той параллели, которой касается геодезическая линия, a — радиус экватора, $\lambda^2 = 0{,}006693\ldots$

Величина t связана с азимутом A_0 в начальной точке соотношением

$$\cos t = \sin A_0 \cdot \cos A_0. \tag{2}$$

Из (1) следует, что

$$\frac{s}{a} = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2 t}}\, d\theta - \psi, \tag{3}$$

где

$$\psi = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta\left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2\cos^2\theta}\right)}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2 t}}\, d\theta. \tag{4}$$

Из (3) находим, что

$$\frac{s}{a} + \psi = \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{\sin t}\right) - \arcsin\left(\frac{\sin\theta_0}{\sin t}\right) \tag{5}$$

или

$$\sin\theta = \sin t \cdot \sin\left(\frac{s}{a} + \psi + \omega_0\right).$$

где $\omega_0 = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_0}{\sin t}\right)$.

Пусть начальная точка M_0 и конечная точка M расположены таким образом, что приведенная широта меняется монотонно вдоль соединяющей их кратчайшей геодезической. Дадим ψ в формуле (5) значение $\psi_0 = 0$. Определяем θ_1 из условия

$$\sin\theta_1 = \sin t \cdot \sin\left(\frac{s}{a} + \omega_0\right).$$

Подставляя найденное значение θ_1 в (4) вместо верхнего предела, находим ψ_1. Это значение ψ_1 подставляем в формулу (5) вместо ψ и находим θ_2, которое подставляем в (4) вместо верхнего предела, находим ψ_2 и т. д. При помощи такого последовательного применения формул (5), (4) мы получим две последовательности чисел:

$$\psi_0 = 0,\ \psi_1,\ \psi_2 \ldots \psi_k \ldots$$

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3 \ldots \theta_k \ldots$$

В работе показывается, что $\lim\limits_{k\to\infty}\theta_k = \theta$, где θ — искомое решение, и дается оценка отклонения θ_k от истинного решения θ

$$|\theta - \theta_k| < \frac{\varepsilon}{1 - 0{,}06\varepsilon^2},$$

где $\varepsilon = \frac{s}{a} \cdot \frac{\sigma^k}{1 - \sigma}$ и $|\sigma| < 0{,}004$.

Величина ψ определяется приближенно следующим образом:

$$\psi = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta\left(1 - \sqrt{1 - \lambda^2\cos^2\theta}\right)}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2 t}}\, d\theta = \int\limits_{\theta_0}^{\theta} \frac{\cos\theta\left(\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\theta + \frac{\lambda^4}{8}\cos^4\theta + \frac{\lambda^6}{16}\cos^6\theta\right)}{\sqrt{\cos^2\theta - \cos^2 t}}\, d\theta + \mu =$$

$$= \alpha \cdot \arcsin\left(\frac{\sin\theta}{\sin t}\right) + \beta \cdot \sin\theta\sqrt{\sin^2 t - \sin^2\theta} + \gamma \cdot \sin^3\theta\sqrt{\sin^2 t - \sin^2\theta} +$$

$$+ \delta \cdot \sin^5\theta\sqrt{\sin^5 t - \sin^2\theta}\,\Big|_{\theta_0}^{\theta} + \mu,$$

где

$$\delta=\frac{\lambda^6}{96}, \quad \gamma=-\frac{\lambda^4}{32}-\frac{3\lambda^6}{64}+\frac{5}{4}\sin^2 t\cdot\delta, \quad \beta=\frac{\lambda^2}{4}+\frac{\lambda^4}{8}+\frac{3\gamma}{2}\sin^2 t,$$

$$\alpha=\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^4}{8}+\frac{\lambda^6}{16}-\beta\sin^2 t$$

и

$$\mu<\frac{\frac{5}{64}\lambda^8+\frac{\lambda^{10}}{64}+\frac{\lambda^{12}}{256}}{2\sqrt{1-\lambda^2}}\left[\arcsin\left(\frac{\sin\theta}{\sin t}\right)-\arcsin\left(\frac{\sin\theta_0}{\sin t}\right)\right].$$

Величина v (долгота) определяется по формуле

$$v=v_0+\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\cos t\sqrt{1-\lambda^2\cos^2\theta}}{\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta-\cos^2 t}}\,d\theta$$

или, приближенно,

$$v=v_0+\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\cos t\left[1-\frac{\lambda^2}{2}\cos^2\theta-\frac{\lambda^4}{8}\cos^4\theta-\frac{\lambda^6}{16}\cos^6\theta\right]}{\cos\theta\sqrt{\cos^2\theta-\cos^2 t}}\,d\theta=v_0+\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos t\sin\theta}{\sqrt{\sin^2 t-\sin^2\theta}}\right)-$$

$$-\left[\alpha_1\arcsin\left(\frac{\sin\theta}{\sin t}\right)+\beta_1\cdot\sin\theta\sqrt{\sin^2 t-\sin^2\theta}+\gamma_1\sin^3\theta\sqrt{\sin^2 t-\sin^2\theta}\right|_{\theta_0}^{\theta},$$

где

$$\alpha_1=\left(\frac{\lambda^2}{2}+\frac{\lambda^4}{8}+\frac{\lambda^6}{16}-\beta\sin^2 t\right)\cos t,$$

$$\beta_1=\left(\frac{\lambda^4}{16}+\frac{\lambda^6}{16}+\frac{3}{2}\gamma\sin^2 t\right)\cos t, \quad \gamma_1=-\frac{\lambda^6}{64}\cos t.$$

Для упрощения вычислений составлены таблицы.

А. М. Березман (*Кемерово*). **Преобразование расслояемых пар конгруенций преобразованием Лапласа в P_5.** 1. Как известно, пара T конгруенций трехмерного проективного пространства P_3 отображается в P_5 двупараметрическим многообразием прямых L_2, которое можно двумя способами разложить на фокальные подсемейства; преобразованию Лапласа многообразия L_2 в P_5 соответствует преобразование Калапсо в P_3.

2. Если пара T — расслояемая, то развертывающиеся поверхности многообразия L_2 соответствуют асимптотическим линиям расслояющих поверхностей.

3. Отсюда следует теорема, которая в несколько иной форме была дана Б. А. Розенфельдом (1948 г.): фокусы многообразия L_2, отображающего расслояемую пару конгруенций, полярно сопряжены относительно Q_4^2.

4. На основании этого можно доказать, что сопряженная сеть в P_5, касательные к которой отображают расслояемые пары, имеет равные инварианты Лапласа—Дарбу; результат используется при выводе уравнений расслояемой пары, которую преобразование Калапсо переводит в расслояемую пару.

5. Если развертывающиеся поверхности многообразия L_2 пересекают Q_4^2 по сопряженным сетям, то соответствующая пара T есть пара конгруенций конфигурации Бианки или пара T с неопределенным преобразованием Калапсо, рассмотренная Бушин Су.

6. Предшествующие результаты позволяют доказать теорему: Если оба преобразования Калапсо переводят расслояемую пару в расслояемые, то эта пара — сопряженная; если одно из преобразований Калапсо переводит сопряженную пару в расслояемую, то и другое преобразование обладает этим свойством.

7. Далее, можно показать, что сопряженная пара конгруенций, которую оба преобразования Калапсо переводят в сопряженные пары, входит в состав сопряженной четверки.

8. Диагональные конгруенции сопряженной четверки, отмеченной в п. 7, образуют сопряженную пару, которую оба преобразования Калапсо переводят в расслояемые, но, вообще говоря, не сопряженные пары.

9. Исследование системы уравнений Пфаффа, определяющих сопряженную четверку п. 7, можно довести до интегралов. Обращение в нуль постоянных интегрирования приводит к конфигурациям, рассмотренным Финиковым и Чехом, Сегре, Пантази; в связи с преобразованием Калапсо эти конфигурации рассматривались С. П. Финиковым.

10. Сопряженная четверка п. 7 характеризуется тем, что сложное отношение четырех прямых: двух прямых, описывающих пару T, входящую в состав этой четверки, и двух прямых, описывающих преобразованную пару T', не зависит от главных параметров пары.

Я. П. Бланк (*Харьков*). **О конгруенциях W.** По теореме Дарбу, в каждой точке поверхности переноса соприкасающиеся плоскости к кривым переноса пересекаются по лучу конгруенции W.

Как показал Бервальд, этот частный тип конгруенций W имеет своими фокальными поверхностями аффинно-минимальные поверхности.

Автор доказывает, что конгруенция W общего вида порождает ∞^1 поверхностей, несущих сети кривых, соприкасающиеся плоскости которых пересекаются по лучам этой конгруенции, причем кривым сети соответствуют на фокальных поверхностях асимптотические линии.

Ю. Ф. Борисов (*Ленинград*). **Параллельный перенос вектора и кривые на нерегулярных гладких поверхностях.** 1. Пусть $\widehat{AB}$ — кривая на гладкой поверхности F, $A_1 = A$, $A_2, \ldots, A_n = B$ — ее последовательные точки, $P_A = P_1$, $P_2, \ldots,$ $P_n = P_B$ — касательные плоскости в этих точках, $\overline{t}_A = \overline{t}_1$ — произвольный вектор P_1, векторы $\overline{t}_k \in P_k$ $(k = 2, \ldots, n)$ таковы, что проекция $\overline{t}_k$ на P_{k-1} равна $\overline{t}_{k-1}$. Если при сгущении точек A_i на L векторы $\overline{t}_n \in P_B$ сходятся к вектору $\overline{t}_B \in P_B$, то, по определению, $\overline{t}_B$ есть результат параллельного переноса $\overline{t}_A$ из A в B по L.

Имеет место теорема: для того чтобы параллельный перенос по L из A в B был определен для любого вектора $\overline{t}_A \in P_A$, необходимо и достаточно, чтобы сумма квадратов углов между нормалями к F в соседних точках A_i стремилась к нулю при сгущении их на L.

2. Все дальнейшие результаты справедливы для гладких поверхностей, удовлетворяющих аксиоме: процесс параллельного переноса единичного вектора равностепенно сходится на всяком компактном множестве спрямляемых кривых.

Эта аксиома равносильна следующей: если $\theta(M, N)$ — угол между нормалями в точках M, N, ρ_F — внутренняя метрика F, то

$$\frac{\theta(M, N)}{\sqrt{\rho_F(M, N)}} \xrightarrow[M \to N]{} 0$$

равномерно на любом компактном множестве.

3. Всякая геодезическая — гладкая кривая.

4. Единичный касательный вектор геодезической переносится по ней параллельно. Обратное неверно. В том случае, когда рассматриваемая поверхность имеет внутреннюю метрику ограниченной кривизны, кривые, вдоль которых касательный вектор переносится параллельно, совпадают с квази-геодезическими в смысле А. Д. Александрова.

5. Параллельный перенос вектора инвариантен относительно изгибания поверхности.

6. Геодезическая кривизна кривой, определяемая как предел отношения поворота дуги (в смысле внутренней геометрии) к ее длине, равна кривизне проекции кривой на касательную плоскость, т. е. геодезической кривизне в смысле дифферен-

циальной геометрии. Этот результат неверен уже для поверхностей, удовлетворяющих более слабому условию

$$\varlimsup_{M\to N}\frac{\theta(M,\ N)}{\sqrt{\rho_F(M,\ N)}}<\delta,\qquad \delta>0.$$

7. Из данной точки в данном направлении можно провести кривую, у которой поворот есть наперед заданная вполне аддитивная функция дуги, все точечные нагрузки которой заключены между $-\pi$ и π (эта функция задается на множестве интервалов из области изменения параметра, являющегося длиной дуги). В частности, в любом направлении можно провести кривую, у которой геодезическая кривизна есть заданная функция длины.

8. Результаты пп. 5, 6, 7 в классической дифференциальной геометрии существенно опираются на двукратную дифференцируемость поверхности, а результаты пп. 3 и 4 требуют еще двукратной дифференцируемости коэффициентов первой квадратичной формы. Рассматриваемые же здесь поверхности могут не иметь вторых производных ни в одной точке, а с точки зрения внутренней метрики не быть многообразиями ограниченной кривизны.

Ю. Ф. Борисов (*Ленинград*). **Геометрия полуокрестности кривой в двумерном многообразии ограниченной кривизны.** 1. Пусть L — кривая в многообразии ограниченной кривизны, гомеоморфная отрезку, имеющая поворот ограниченной вариации и не имеющая точек с поворотом π («точек возврата»). Кроме того, предполагается, что кривизны концов L меньше 2π. При сделанных предположениях в некоторой полуокрестности V_L кривой L можно ввести координаты $t,\ n,\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant n\leqslant n_0$, $n_0>0$, таким образом, что n есть расстояние точки от L в метрике данного многообразия, а t — приведенная длина на кривой $n=\text{const}$ (аналог полугеодезических координат).

2. Существует многообразие ограниченной кривизны F, которое за вычетом кривой L' локально изометрично плоскости, а сама L' допускает такое отображение на кривую L, рассмотренную в п. 1, что соответствующие дуги L и L' имеют одинаковую длину и поворот. При этом L' гомеоморфна отрезку, а ее поворот измеряется со стороны некоторой полуокрестности $V'_{L'}$. Эта полуокрестность может быть выбрана так, что существует почти изометрическое отображение V_L на $V'_{L'}$, ввиду чего $V_{L'}$ играет роль эвклидова пространства, соприкасающегося с V_L вдоль кривой L. Такое отображение строится путем введения в V_L и $V'_{L'}$ координат $t,\ n$, и сопоставления точек V_L и $V'_{L'}$ с одинаковыми координатами. При этом, однако, координату t приходится определять более сложным способом, учитывающим характер и распределение угловых точек на L, в результате чего t остается приведенной длиной в общем случае лишь на L.

3. За счет специального выбора t при $n>0$ (t остается на L приведенной длиной) можно также получить координаты $t,\ n$, в которых справедливы следующие формулы для вариации длины и площади:

$$\delta s=\left.\frac{ds}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}=\int_0^1 n\,(t)\,dg\,(t)+n\,(0)\,f\,(\alpha)+n\,(1)\,f\,(\beta),$$

$$\delta\sigma=\left.\frac{d\sigma}{d\lambda}\right|_{\lambda=0}=s\,(0)\int_0^1 n\,(t)\,dt.$$

Здесь $s=s\,(\lambda)$ — длина кривой с уравнением $n=\lambda n\,(t)$, $\sigma=\sigma\,(\lambda)$ — площадь, ограниченная кривой L и кривыми $t=0,\ n=\lambda n\,(t),\ t=1$; $\alpha,\ \beta$ — углы между кривыми L и $t=0$, L и $t=1$;

$$f\,(x)=\begin{cases}\operatorname{tg}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) & \text{при}\quad 0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\\[2mm] x-\dfrac{\pi}{2} & \text{при}\quad x>\dfrac{\pi}{2}\,;\end{cases}$$

$$g(t) = -\varphi(t) + \sum_{\tau_i > 0} \tau_i - \sum_{\tau_i > 0} 2 \operatorname{tg} \frac{\tau_i}{2},$$

где $\varphi(t)$ — поворот дуги L, отвечающей изменению параметра от 0 до t; τ_i — повороты в угловых точках этой дуги.

4. Применение указанных формул к изопериметрической задаче дает следующий результат: если кривая L в многообразии ограниченной кривизны ограничивает гомеоморфную кругу область G наибольшей площади по сравнению с областями, ограниченными близкими кривыми той же длины, то L обладает такими свойствами:

1) поворот любой дуги L, а также повороты во всех ее угловых точках со стороны области $\hat{G}$, внешней по отношению к G, неположительны;

2) если $\widehat{A_1A_2}$, $\widehat{B_1B_2}$ — дуги L одинаковой длины без общих внутренних точек, то их повороты φ_G и $\varphi_{\hat{G}}$ со стороны областей G и $\hat{G}$ связаны соотношением

$$\varphi_G(\widehat{A_1A_2}) \leqslant -\varphi_{\hat{G}}(\widehat{B_1B_2}).$$

Если в рассматриваемом многообразии кривые с поворотом ограниченной вариации не имеют отрицательных нагрузок кривизны (таковы, например, общие выпуклые поверхности), то формулированное условие равносильно постоянству геодезической кривизны, определяемой как производная поворота по длине дуги.

5. Из предыдущего результата вытекает существование в многообразиях с нерегулярной метрикой кривых постоянной геодезической кривизны, удовлетворяющих различным дополнительным условиям, например замкнутых и имеющих данную длину.

С. С. Бюшгенс (*Москва*). **Линии конгруенции на семействе поверхностей.** В докладе устанавливаются условия, при которых линии данной конгруенции (в трехмерном эвклидовом пространстве) могут быть на некотором семействе поверхностей (одном или нескольких) теми или иными специальными линиями, как то: линиями кривизны или асимптотическими линиями, или геодезическими.

1. Для того чтобы конгруенция линий была конгруенцией линий кривизны на семействе поверхностей, необходимо и достаточно, чтобы поле векторов, ортогональных к линиям одного из семейств линий кривизны данной конгруенции и к линиям самой конгруенции, имело семейство ортогональных поверхностей. При выполнении этого условия соответствующее семейство поверхностей определяется единственным образом.

Если указанное условие выполняется для каждого из двух семейств линий кривизны данной конгруенции, то линии последней будут линиями кривизны на поверхностях двух семейств.

Если каждое поле нормалей к линиям кривизны (и к самим линиям) данной конгруенции имеет ортогональное семейство поверхностей, то линии кривизны обоих семейств, а также и эти поверхности двух семейств пересекаются под постоянным углом вдоль каждой отдельной линии конгруенции.

Данная конгруенция линий может быть конгруенцией линий кривизны более чем на двух семействах поверхностей только в том случае, когда линии кривизны данной конгруенции неопределенны; в этом случае конгруенция является конгруенцией линий, ортогональных либо к какому-нибудь семейству сфер, либо к семейству плоскостей.

2. Конгруенция линий будет конгруенцией геодезических линий на некотором семействе поверхностей (единственном) только в том случае, когда поле главных нормалей линий конгруенции допускает семейство ортогональных поверхностей. На каждой поверхности этого семейства все двупараметрическое семейство геодезических линий определится квадратурами. Искомые конгруенции зависят от одной произвольной функции трех аргументов и одной функции, удовлетворяющей уравнению с частными производными второго порядка по трем аргументам.

Конгруенция линий может быть конгруенцией геодезических более чем на одном семействе поверхностей только в том случае, если эта конгруенция прямолинейная.

3. Конгруенция линий будет конгруенцией асимптотических линий на некотором семействе поверхностей только в том случае, когда поле бинормалей линий конгруенции допускает семейство ортогональных поверхностей. Произвол выбора такой конгруенции тот же, что и в предыдущем случае.

4. Конгруенция линий будет конгруенцией геодезических линий на одном семействе поверхностей и одновременно конгруенцией асимптотических линий на другом семействе поверхностей, если как поле главных нормалей линий конгруенции, так и поле их бинормалей допускают семейство ортогональных поверхностей. Такая конгруенция линий существует. Если векторное поле (нормированное) касательных к линиям искомой конгруенции выразить через две функции, то, применяя метод, употребленный в двух предыдущих случаях, получим для этих функций декартовых координат два уравнения с частными производными (по трем аргументам), из которых одно второго порядка, другое — первого порядка; соответствующие семейства поверхностей определятся по двум вполне интегрируемым уравнениям Пфаффа. Но можно также искомую конгруенцию определить по одному из допустимых семейств ортогональных поверхностей (либо полю главных нормалей, либо полю бинормалей); это семейство поверхностей будет определяться одним уравнением (для одной функции) с частными производными третьего порядка; тогда второе семейство поверхностей определится вполне интегрируемым уравнением Пфаффа.

А. М. Васильев (*Москва*). **О зависимости между дифференциально-геометрическими свойствами.** Дифференциальная геометрия изучает многообразия, лежащие в пространствах, преобразуемых конечной или бесконечной группой («псевдогруппой») Ли. Под это правило подходят и геометрии различных «обобщенных пространств». В самом деле, здесь просто отражается тот факт, что изучаемые в дифференциальной геометрии образы задаются уравнениями относительно переменных, закон допустимых преобразований которых известен.

Частные производные до некоторого порядка v от переменных пространства по переменным, независимым на изучаемом подмногообразии, преобразуются под действием основной группы как целые рациональные представления p вполне определенных конечных групп Ли — дифференциальных групп порядка v данного пространства с данной группой. Дифференциальный ковариант порядка v задается уравнениями $y^a = Q^a(X^i)$, где X^i — компоненты представления p, Q^a — вполне определенные многочлены, Y^a — компоненты целого рационального представления q дифференциальной группы. Система уравнений относительно частных производных в точке подмногообразия имеет инвариантный смысл, если, выполняясь в некоторой точке подмногообразия, она выполняется и в соответствующих точках каждого подмногообразия, полученного из данного произвольным преобразованием группы. Всякая инвариантная система уравнений может быть заменена равносильной, полученной приравниванием нулю всех компонент некоторого дифференциального коварианта. Классы равносильных систем, имеющих инвариантный смысл, тождественны с инвариантными относительно группы геометрическими свойствами многообразия в данной точке. О дифференциально-геометрическом свойстве всего многообразия говорят, когда оно обладает некоторым свойством в каждой своей точке.

Переменные Y^a, преобразуемые как компоненты дифференциального коварианта, вместе с переменными исходного пространства, можно рассматривать как параметры нового пространства $K_{q,v}$, преобразуемого той же группой. Уравнения r-мерного многообразия вместе с уравнениями, задающими в каждой его точке ковариант $Y^a = Q^a(X^i)$, можно рассматривать как уравнения r-мерного многообразия в пространстве $K_{q,v}$.

Пусть поверхность в исходном пространстве E обладает дифференциальным свойством H. Тогда в пространстве $K_{q,v}$ существует дифференциальный ковариант, обращение в нуль которого на r-мерном подмногообразии является необходимым и достаточным условием того, что эта поверхность есть множество ковариантов Q^a хотя бы для одной поверхности пространства E, обладающей свойством H.

В. И. Ведерников (*Воронеж*). **Конформная наложимость поверхностей.** Применяя общую идею нормализации, А. П. Норден построил теорию нормализованных поверхностей V_m в конформном пространстве M_n. На каждой нормализованной поверхности V_m в M_n определяется внутренняя связность Вейля.

Можно определить конформную наложимость нормализованных поверхностей V_m в M_n следующим образом.

1. Две нормализованные поверхности конформно наложимы, если внутренние геометрии этих поверхностей совпадают. В частном случае здесь определяется классическая наложимость поверхностей в пространстве постоянной кривизны. Можно указать геометрическую интерпретацию конформной наложимости нормализованных поверхностей, обобщающую соответствующую интерпретацию классической наложимости в пространстве Эвклида.

Если V_m $(m \geqslant 2)$ в M_n не нормализована, то на поверхности определяется множество всех возможных нормализаций и можно определить конформную наложимость ненормализованных поверхностей следующим образом.

2. Две поверхности конформно наложимы, если для каждой нормализации одной поверхности существует такая нормализация другой поверхности, что внутренние геометрии соответствующих нормализованных поверхностей совпадают. Оказывается, что две поверхности конформно наложимы тогда и только тогда, когда между данными поверхностями можно установить конформное соответствие.

При $m=2$, $n=3$ определение 2) не имеет смысла, ибо в этом случае все поверхности конформно наложимы. Предлагается следующее определение.

Две поверхности V_2 и V_2' конформно наложимы, если угловые матрицы центральных сфер поверхностей V_2 и V'_2 совпадают.

Сравнение определенной нами конформной наложимости поверхностей с конформной наложимостью, определенной Картаном, показывает, что всякие две поверхности, наложимые по Картану, являются наложимыми в силу определения 2).

Рассматривая нормализацию поверхности V_m в M_n, можно определить понятие обобщенной нормализации поверхностей, что позволит в частном случае определить понятие конформной наложимости поверхностных элементов в геометрии сфер Ли.

Л. Л. Вербицкий (*Николаев*). **Конформно-эвклидовы V_n в E_{n+1}.** В то время как метрика поверхности V_2 в трехмерном эвклидовом пространстве E_3 при соответствующих требованиях регулярности всегда конформно-эвклидова, т. е. преобразованием криволинейных координат на поверхности приводится к виду $ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2)$, метрика V_n в E_{n+1} при $n > 2$ не является, вообще говоря, конформно-эвклидовой.

При $n \geqslant 4$ конформно-эвклидовы V_n в E_{n+1} представляют собой огибающие ∞^1 гиперсфер вмещающего пространства E_{n+1}.

Частным случаем конформно-эвклидовых V_n в E_{n+1} являются субпроективные пространства Кагана, изученные П. К. Рашевским и Г. М. Шапиро.

Для того чтобы конформно-эвклидово V_n в E_{n+1} $(n \geqslant 4)$ было субпроективным пространством, необходимо и достаточно, чтобы центры гиперсфер, огибающей которых является V_n в E_{n+1}, лежали на одной прямой в E_{n+1}.

Задача разыскания конформно-эвклидовых V_3 в E_4 пока не решена в общем виде.

Если одна из главных кривизн конформно-эвклидова V_3 в E_4 тождественно равна нулю, то V_3 есть линейчатая гиперповерхность, все образующие которой проходят через одну точку S; при этом гиперсферы пространства E_4 с центром в S пересекают V_3 по V_2 постоянной кривизны.

И. А. Вильнер (*Москва*). **Проблема анаморфозы и номографической интерпретации функций комплексного переменного.** Дается содержащееся в работах докладчика решение проблемы анаморфозы функций комплексного переменного и геометрия номограмм функций комплексного переменного. Попутно рассматривается интерпретация полученных зависимостей циркульными номограммами Герсеванова и номограммами с транспарантами, а также номографический синтез механизмов, соответствующих этим номограммам.

Демонстрируются опубликованные автором номограммы функций комплексного переменного и эллиптических функций.

Рассматриваются мнимые номограммы и их интерпретация в пространстве мнимой анаморфозы L^*_4. Дается топология и геометрия этого пространства. Устанавливается связь с линейчатой и комплексными плоскими геометриями.

И. А. Вильнер (*Москва*). **Номографирование функций многих переменных на базе метода выравненных точек.** Излагаются результаты в области методов, представлений и критериев номографируемости систем уравнений на базе метода выравненных точек.

Основой служит N-теорема докладчика, дающая решение проблемы анаморфозы, опубликованная в ДАН, т. 58, № 5 (1947 г.).

Вводятся проективно-дифференциальные инварианты Гурса—Пэнлеве и Шварца, проективная и аффинная кривизны, которые позволяют решить вопрос номографической совместности уравнений и систем, в том числе для случая пространственной и мнимой анаморфозы.

Рассматриваются также символические бесквадратурные методы номографирования функций и уравнений, т. е. метод условных производных автора, и его приложения к проблеме анаморфозы.

Рассматривается общая проблема интерпретации и соответствующих каждой интерпретации групп преобразований и полных систем инвариантов, позволяющих для каждой интерпретации до конца решить вопрос совместимости (конгруентности относительно данной группы) тех звеньев номограммы (составной и сложной), которые содержат одноименные немые и градуированные шкалы и поля.

Ю. А. Волков (*Ленинград*). **О существовании выпуклой поверхности с данной метрикой.** Известные аналитические способы решения проблемы Вейля — проблемы реализации метрики, заданной на сфере линейным элементом с положительной кривизной, сводятся, по существу, к решению соответствующего уравнения Монжа—Ампера методом непрерывного продолжения по параметру. В 1937 г. В. Бляшке и Г. Герглотц указали другой путь. Они предлагали продолжать заданную метрику внутрь шара так, чтобы полученное риманово многообразие оказалось изометричным некоторому телу эвклидова пространства. Продолжение метрики предлагалось искать путем решения некоторой вариационной задачи.

Новый подход развил в 1941 г. А. Д. Александров. Его решение проблемы Вейля опирается на предварительное решение соответствующей задачи для многогранников и последующий предельный переход к общим выпуклым поверхностям. Мне удалось найти новое доказательство теоремы о существовании выпуклого многогранника с данной разверткой, основанное на идее Бляшке и Герглотца. Вместе с известными результатами А. Д. Александрова о предельном переходе это дает и способ решения общей проблемы.

Всякий замкнутый выпуклый многогранник можно представлять склеенным из пирамид с общей вершиной в одной из вершин многогранника. Мы рассматриваем такого рода наборы пирамид и абстрактным отождествлением, «склепванием», граней превращаем их в «телесные» развертки. Развертка, в которой склеивание можно осуществить, ищется так: выделяется компактное множество разверток, удовлетворяющих всем необходимым условиям, кроме, быть может, одного: о суммах двугранных углов пирамид, подходящих к внутреннему ребру развертки, известно лишь, что все они $\geqslant 2\pi$; на этом множестве решается некоторая экстремальная задача. Ее решение и дает искомую развертку.

М. Я. Выгодский (*Москва*). **Аналог теоремы Лагранжа о среднем для пространственной линии.** Теорему Лагранжа о среднем можно сформулировать в геометрических терминах следующим образом.

На дуге $\breve{AB}$ плоской линии, обладающей касательной в каждой точке, есть по меньшей мере одна точка, где нормаль перпендикулярна к хорде AB.

В этой форме теорема Лагранжа при некоторых добавочных условиях распространяется на случай пространственной кривой (в эвклидовом пространстве любого числа измерений). Именно, имеет место следующая теорема.

Пусть радиус-вектор $r(s)$ точки $N(s)$ дуги $\overset{\frown}{AB}$ обладает непрерывными производными (по дуге) до третьего порядка включительно и пусть вдоль всей дуги $\overset{\frown}{AB}$ кривизна не равна нулю. Тогда на дуге $\overset{\frown}{AB}$ есть по меньшей мере одна точка, где главная нормаль перпендикулярна к хорде AB при условии, что длина l дуги $\overset{\frown}{AB}$ удовлетворяет неравенствам

$$l \leqslant \frac{2{,}4k}{M}, \tag{1}$$

$$l \leqslant \sqrt{\frac{24}{M}}, \tag{2}$$

где через k обозначена наименьшая из кривизн $\varkappa_A$, $\varkappa_B$, а через M — верхняя граница модуля $|r'''(s)|$.

Доказательство основывается на оценке угла φ между касательной к дуге $\overset{\frown}{AB}$ и хордой AB. При выполнении условий теоремы угол φ_C для середины C дуги $\overset{\frown}{AB}$ не превосходит меньшего из углов φ_A, φ_B. Отсюда следует, что на дуге $\overset{\frown}{AB}$ существует по меньшей мере одна стационарная точка для φ. В этой точке главная нормаль перпендикулярна к хорде AB.

Р. М. Гейдельман (*Москва*). **Теория фокальных конгруенций.** Конгруенцией называется такое семейство k-мерных плоскостей в n-мерном проективном пространстве P_n с фундаментальной гиперквадрикой — абсолютом Q_{n-1}, что через каждую точку P_n проходит конечное число плоскостей семейства.

Псевдоконгруенцией называется такое семейство k-мерных плоскостей, что в произвольной гиперплоскости лежит конечное число плоскостей.

Автором найдены фундаментальные инвариантные дифференциальные формы для конгруенций и псевдоконгруенций k-мерных плоскостей в P_n с абсолютом Q_{n-1}, выяснен их геометрический смысл, рассмотрена теория фокальных конгруенций и псевдоконгруенций.

Даны приложения этой теории к конформной геометрии конгруенций окружностей трехмерного пространства, конгруенций окружностей и сфер многомерного конформного пространства и к проблеме расслоения псевдоконгруенций плоскостей в проективном и неэвклидовых пространствах.

Поставлена и решена проблема расслоения конгруенций окружностей и сфер в трех- и многомерном конформном пространстве. Из изложенной теории может быть получен ряд результатов в геометрии других групп Клейна.

А. А. Глаголев (*Москва*). **Применение многоэлементных вурфов к установлению некоторых соответствий в n-мерном пространстве.** В 1950 г. Мейлер [1], обобщая результаты Мортона и Чепплянь [2] и не прибегая к теории многоэлементных вурфов, аналитическим методом изучил соответствие между точками и нормальными кривыми n-мерного пространства, проходящими через $n+1$ неподвижных точек.

Между тем теория многоэлементных вурфов, как это показано в работе [3], позволяет конструктивно осуществить вышеупомянутое соответствие Мейлера, причем для синтетического изучения этого соответствия важное значение имеет следующая теорема.

Если в n-мерном пространстве даны $n+1$ независимых точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ и задан $(n+2)$-членный вурф W_{n+2}, то в любой гиперплоскости S_{n-1} найдется единственное пространство S_{n-2}, такое, что вурф

$$(S_{n-2}A_1, S_{n-2}A_2, \ldots, S_{n-2}A_{n+1}, S_{n-1}) = W_{n+2}.$$

Исследования Мейлера, Мортона и Чепплянь имеют некоторое отношение к теории однообразного прямолинейного движения n-мерной коллинеарно изменяемой системы, рассмотренной мною в работе [4].

В самом деле, если в момент времени t соединить прямыми прямолинейно движущиеся точки n-мерной коллинеарно изменяемой системы с ее $n+1$ неподвижными точками, то из каждой подвижной точки системы будет выходить $n+1$ соединяющих прямых и траектория точки, причем полученный таким образом вурф $n+2$ прямых в момент времени t будет одним и тем же для всех движущихся точек системы. Отсюда следует, что при однообразном прямолинейном движении n-мерной коллинеарно изменяемой системы движущиеся точки, траектории которых проходят через одну и ту же точку M, в момент времени t лежат на нормальной кривой n-мерного пространства, проходящей через $n+1$ неподвижных точек системы. Но это означает, что в момент времени t между точками M n-мерного пространства и нормальными кривыми C_n, проходящими через $n+1$ неподвижных точек системы, устанавливается то самое взаимно однозначное соответствие, которое изучал Мейлер, а для случая $n=3$ — Мортон и Чеппль.

Из результатов работ [3, 4] вытекает также следующее новое определение системы Мейлера нормальных кривых в n-мерном пространстве, независимое от понятия тетраэдрального комплекса и его аналога в n-мерном пространстве:

Система нормальных кривых n-мерного пространства состоит из всех тех нормальных кривых, проходящих через точки A_1, A_2, . . ., A_n, на каждой из которых вурф $(A_1 A_2 \ldots A_{n+1}) = W_{n+1}$ сохраняет заданное значение.

В заключение заметим, что траектории точек прямолинейно движущейся однообразной коллинеарно изменяемой системы образуют ту самую систему прямых, которая рассматривается в работах [1] и [3].

Лит.: 1. Meyler D. S., The Quart. J. of math., Oxford, 2 ser., **1**, N 1, (1950); 2. Morton V. C. a. Chapple M. T., The Quart. J. of math., Oxford **19**, N 75, (1948). 3. Глаголев А. А., ДАН СССР **62**, № 3, (1948). 4. Глаголев А. А., Уч. зап. МОПИ, **21**, (1954).

К. И. Гринцевичюс (*Вильнюс*). **Гиперкомплекс прямых в многомерном проективном пространстве.** В $(n-1)$-мерном пространстве многообразие всех прямых является $(2n-4)$-мерным. Его $(2n-5)$-мерное подмногообразие называется гиперкомплексом прямых. В работе методом Лаптева [1] исследуются основные дифференциально-геометрические понятия, связанные с гиперкомплексом прямых в проективном пространстве.

Если инфинитезимальное перемещение репера $\{A_i\}$ записать в виде

$$dA_i = \omega_i^k A_k,$$

то гиперкомплекс, описываемый ребром A_1A_2, задается системой внешних дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \omega_2^3 &= -\omega_1^4, \\ [\omega_3^4 - \omega_2^1,\ \omega_1^3] + [\omega_2^2 - \omega_1^1 - \omega_3^3 + \omega_4^4.\ \ \omega_1^4] &+ [\omega_4^3 - \omega_1^2,\ \omega_2^4] + [\omega_K^{5-p} \omega_p^K] = 0, \end{aligned}\right\}$$

где $p=1, 2$; $K=5, 6, \ldots, n$; $i,k = 1,2, \ldots, n$.

Прямые гиперкомплекса, проходящие через точку луча $l \equiv A_1A_2$, образуют гиперконус. Всякая касательная гиперплоскость соответствующего гиперконуса проходит через $(n-3)$-мерную плоскость $\{lA_K\}$. Эта плоскость определяется дифференциальной окрестностью первого порядка луча l. Назовем ее касательным пространством луча l. Инвариантную трехмерную плоскость, пересекающуюся с касательным пространством только по лучу l, следует называть нормальным пространством луча l.

Дифференциальная окрестность второго порядка рассматриваемого луча l гиперкомплекса дает следующие инвариантные геометрические понятия:

1) $2n-8$ точек на луче l;

2) одно нормальное пространство;

3) две связки нормальных пространств, так что каждое нормальное пространство определенным образом соответствует паре точек на луче l;

4) ряд поверхностей различных порядков и размерностей;

5) взаимно однозначное соответствие между нормальными пространствами и $(n-5)$-мерными плоскостями, лежащими в касательном пространстве.

Вышеупомянутые геометрические понятия возникают аналитическим путем. В докладе дана их геометрическая интерпретация.

Д. А. Гудков (*Горький*). **О топологии плоских действительных кривых шестого порядка.** 1. В 1876 г. Гарнак [1] показал, что неособая алгебраическая кривая n-го порядка состоит не более чем из $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ действительных ветвей (в частности, кривая шестого порядка — не более чем из 11 овалов), и дал метод построения кривых n-го порядка с наибольшим числом овалов. В 1891 г. Гильберт [2] дал другой метод для построения таких кривых и высказал гипотезу, что C_6, состоящая из 11 овалов вне друг друга, не существует. В 1900 г. на международном математическом конгрессе Гильберт повторил указанную гипотезу и поставил общую проблему изучения алгебраических кривых и поверхностей. Доказательству гипотезы Гильберта было посвящено несколько работ в период с 1906 по 1929 г. Считалось, что эта гипотеза доказана Рооном [3]. Однако в этой работе Роон использовал неверную теорему. Лишь в 1938 г. Петровский [4] доказал общую теорему, из которой гипотеза Гильберта следует как частный случай.

2. По теореме Гарнака и из соображений пересечения с прямой нами установлено, что неособая кривая C_6 может быть не более чем 68 топологических типов (из которых, по теореме Петровского, не существует лишь один: кривая из 11 овалов вне друг друга). Далее доказывается:

Теорема 1. Неособые кривые C_6 53 топологических типов (из указанных выше 68) существуют и получаются из распадающихся кривых C_6 малыми добавками.

Доказательство состоит в построении этих кривых приемами Гарнака [1] и Гильберта [2], а также незначительно измененными приемами.

Теорема 2. Неособая кривая C_6 не может иметь ни одного из оставшихся 14 топологических типов (из указанных 68).

Доказательство ведется от противного. Пусть кривая C_6 одного из этих 14 топологических типов существует. Тогда существует хотя бы одна из некоторых определенных уникурсальных кривых C_6. Затем доказывается, что ни одна из этих уникурсальных существовать не может. Принцип последнего доказательства состоит в том, что, двигаясь в пространстве коэффициентов кривых шестого порядка (это пространство проективное) по некоторой алгебраической кривой Г, мы меняем нашу уникурсальную кривую некоторым определенным образом так, что, во-первых, движение будет незамкнутое (какой-либо овал сжимается или расширяется) и, во-вторых, после некоторого конечного числа изменений топологии этой уникурсальной кривой наступает момент, когда эта топология изменяться не может. Поскольку ветвь алгебраической кривой Г (по которой мы двигаемся) замкнута, то получается противоречие, которое и доказывает несуществование взятой уникурсальной.

3. Идея доказательства теоремы 2 взята из работ Роона и других исследователей, которые разрабатывали метод доказательства гипотезы Гильберта. Однако только подробный анализ этих работ — с точки зрения пространства коэффициентов и понятий «грубости» и «степеней негрубости», — принадлежащих А. А. Андронову, позволил изучить все логические возможности и трудности, которые возникают в указанном методе, и сделать его строгим.

Любопытно отметить, что этот метод оказался принципиально не применимым для доказательства гипотезы Гильберта.

Метод не применим для кривых более высокого порядка.

Лит.: 1. Harnack, Math. Ann. **10**, (1876), 189. 2. Hilbert D., Math. Ann. **38**, (1891), 115, 3. Rohn K., Math. Ann. **73**, (1913), 177; 4. Петровский И. Г., Ann. of Math. **39**, N 1, (1938).

М. А. Джавадов (*Баку*). **Пространства над альтернионами и их применение к геометрическому истолкованию спинорных представлений движений вещественных неэвклидовых пространств.** Рассматривается алгебра альтернионов ${}^lA_m$, т. е. вещественная алгебра ранга 2^{m-1} с базисом, состоящим из $1, l_1, l_2, \ldots, l_{m-1}$ и из всевозможных произведений $l_{i_1 i_2 \ldots i_k} = l_{i_1}, l^{i_2} \ldots l_{i_k}$, причем $l_i l_j = -l_j l_i$, $l_i^2 = +1$

для l значений индекса i, $l_i^2=-1$ для остальных значений i (алгебра ${}^0A_m=A_m$ — алгебра чисел Клиффорда). В алгебре ${}^lA_m$ определен инволюционный антиавтоморфизм $x\to\bar{x}$ и, при четном m, инволюционный автоморфизм $x\to\tilde{x}$. Показывается, что всякий непрерывный автоморфизм алгебры ${}^lA_m$ имеет вид

$$f(x)=axa^{-1}$$

и, при четном m,

$$f(x)=a\tilde{x}a^{-1},$$

а всякий непрерывный антиавтоморфизм имеет вид

$$f(x)=a\bar{x}a^{-1}$$

и, при четном m,

$$f(x)=a\tilde{\bar{x}}a^{-1}.$$

Определяется аффинное пространство $E_n({}^lA_m)$ над алгеброй ${}^lA_m$, а также прямые, плоскости и аффинные преобразования в этом пространстве. Показывается, что аффинное преобразование пространства $E_n({}^lA_m)$ имеет вид

$$'x^i=\sum_j a_j^i ax^j a^{-1}+a_0^i$$

и, при четном m,

$$'x^i=\sum_j a_j^i a\tilde{x}^j a^{-1}+a_0^i.$$

Определяется проективное пространство $P_n({}^lA_m)$ над алгеброй ${}^lA_m$, а также прямые, плоскости, коллинеации и корреляции в этом пространстве. Показывается, что коллинеации пространства $P_n({}^lA_m)$ имеют вид

$$'x^il=\sum_j a_j^i x^j$$

и, при четном m,

$$'x^il=\sum_j a_j^i \tilde{x}^j,$$

а корреляции пространства $P_m({}^lA_m)$ имеют вид

$$lu_i=\sum_j \bar{x}^j a_{ij}$$

и, при четном m,

$$lu_i=\sum_j \tilde{\bar{x}}a_{ij}.$$

В пространствах $P_{2n+1}(A_m)$ определяются линейные конгруенции прямых, показывается, что линейная конгруенция прямых в пространстве $P_{2n+1}(A_m)$ находится во взаимно однозначном и взаимно непрерывном соответствии с точками пространства $P_n(A_{m+1})$, причем группа коллинеаций пространства $P_n(A_m)$ изоморфна фактор-группе группы коллинеаций пространства $P_{2n+1}(A_m)$, переводящих в себя линейную конгруенцию, по подгруппе этой группы, состоящей из коллинеаций, переводящих в себя каждую прямую конгруенции.

Определяются также неэвклидовы пространства $K_n({}^lA_m)$ над алгеброй ${}^lA_m$, для которых имеют место аналогичные теоремы.

Пространства над альтернионами применяются к геометрическому истолкованию спинорных представлений движений вещественных неэвклидовых пространств ${}^lS_n$.

Если движение пространства ${}^lS_n$ с определителем $+1$ представляется элементом спинорной группы алгебры ${}^lA_{n+1}$, а этот альтернион в свою очередь представляется матрицей второго порядка $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ с элементами из алгебры ${}^{l-1}A_{n-1}$, то в качестве спиноров пространства ${}^lS_n$ рассматриваются векторы пространства $E_2({}^{l-1}A_{n-1})$, в котором матрица $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ определяет линейное преобразование:

$$\left.\begin{aligned}'z^0&=Az^0+Bz^1\\ 'z^1&=Cz^0+Dz^1\end{aligned}\right\}\qquad (*)$$

Показывается, что координаты z^0, z^1 этих спиноров можно рассматривать как координаты точек абсолюта пространства ${}^lS_n$. Это геометрическое истолкование более наглядно, чем геометрическое истолкование спиноров, предложенное Картаном, так как координаты спиноров Картана являются координатами плоских образующих максимальной размерности абсолютов, которые мнимы почти для всех пространств ${}^lS_n$, в то время как точки абсолютов почти всех пространств ${}^lS_n$ вещественны.

Альтернионы z^0, z^1 можно также рассматривать как координаты точки альтернионной проективной прямой $P_1({}^{l-1}A_{n-1})$, а линейное преобразование (*) — как коллинеацию этой прямой. Если на прямой $P_1({}^{l-1}A_{n-1})$ перейти к аффинным координатам, то преобразование (*) может быть переписано в виде дробно-линейного образования

$$'z = (A + Bz)(Cz + D)^{-1}.$$

Частными случаями результатов настоящей работы являются известные интерпретации n-мерных проективных и неэвклидовых пространств в виде линейных конгруенций прямых вещественных и комплексных $(2n+1)$-мерных пространств и представление движений неэвклидовых пространств ${}'S_2$, ${}'S_3$, ${}'S_5$ дробно-линейными преобразованиями вещественных чисел, комплексных чисел и кватернионов.

Г. И. Дринфельд (*Харьков*). **Теория интегральных инвариантов и интегральная геометрия.** Бляшке и его сотрудники объединили названием «интегральная геометрия» цикл работ, в которых исходным является понятие меры множества рассматриваемых геометрических объектов (множество точек, множество прямых, множество положений координатной системы и т. п.). При этом требуется, чтобы мера выражалась в замкнутой аналитической форме, была единственной и инвариантной относительно некоторой группы преобразований (группы движений). Такую меру можно рассматривать как интегральный инвариант, что и отмечалось рядом авторов. Однако вплоть до последнего времени теория интегральных инвариантов непрерывных групп преобразований не находила систематического применения в интегральной геометрии. Можно полагать, что одной из основных причин такого обстоятельства является то, что условия инвариантности приводят к интегрированию систем большого числа уравнений с частными производными первого порядка многих неизвестных функций. Оказывается, что трудности интегрирования таких систем преодолимы.

Естественным образом используются понятия продолженной и расширенной группы и вводятся в рассмотрение интегральные инварианты низших порядков, представляющие интерес для интегральной геометрии по ряду причин: в некоторых случаях они имеют простой геометрический смысл, часто по ним можно построить меру изучаемого множества, они допускают теоретико-вероятностное истолкование.

В докладе приводится ряд формул интегральной геометрии, полученных применением теории интегральных инвариантов.

И. П. Егоров (*Пенза*). **Эквиаффинные пространства третьей лакунарности.** В распределении порядков групп движений $\mathfrak{G}_r$ пространств аффинной связности известно наличие двух лакун: в статьях [1] и [2] показано несуществование пространств аффинной связности, допускающих полные группы $\mathfrak{G}_r$, порядок r которых удовлетворяет неравенству $n^2 < r < n^2 + n$ (первая лакуна) или неравенству $n^2 - n + 1 < r < n^2 - 1$ (вторая лакуна).

В настоящем сообщении устанавливается третья лакуна в распределении порядков полных групп движений эквиаффинных пространств A_n и выясняются связанные с ней пространства (пространства третьей лакунарности), обладающие полными группами движений $\mathfrak{G}_r$ порядка r, где $n^2 - n - 2 \leqslant r \leqslant n^2 - n + 1$. Будем рассматривать пространства A_n с группой $\mathfrak{G}_r$, причем $n^2 - 2n + 5 < r \leqslant n^2 - n + 1$. Возможные эквиаффинные пространства необходимо являются проективно-эвклидовыми, допускающими поля абсолютно параллельных контравариантных векторов. Показывается, что необходимым и достаточным условием того, чтобы проективно-эвклидово пространство допускало по крайней мере k полей ξ^i_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, k)$

абсолютно параллельных векторов, является существование такой проективно-эвклидовой системы координат, в которой функция связности ψ приводится к виду

$$\psi = \psi(x^{k+1},\ x^{k+2}, \ldots,\ x^n), \quad \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\delta_\beta\psi_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\psi_\beta, \quad \psi_\alpha = \frac{\partial\psi}{\partial x^\alpha}.$$

Затем выясняется несуществование эквиаффинных пространств A_n с полными группами движений $\mathfrak{G}_r$, порядок r которых удовлетворяет неравенствам $n^2 - 2n + 5 < r < n^2 - n - 2$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы эквиаффинное пространство A_n было пространством третьей лакунарности (т. е. пространством, допускающим $\mathfrak{G}_r$, где $n^2 - n - 2 \leqslant r \leqslant n^2 - n + 1$), является наличие в этом пространстве точно $n - 2$ полей абсолютно параллельных контравариантных векторов ξ^i_α $(\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ n - 2)$.

Эквипроективное пространство D_n заданного ранга $n - k$ тензора $R_{ij} = R^k_{ijk}$, допускающее k полей абсолютно параллельных векторов ξ^i_α $(\alpha = 1,\ 2, \ldots,\ k)$, обладает группой движений $\mathfrak{G}_r$, причем $k(n+1) \leqslant r \leqslant n(n+1)/_2 + k(k+1)/_2$. Пространство D_n является максимально подвижным при $n > k + 1$ тогда и только тогда, когда оно симметрическое.

В заключение дается классификация эквиаффинных пространств третьей лакунарности по группам движений.

Лит.: 1. Егоров И. П., ДАН СССР, 57, № 9, (1947), 867—870. 2. Егоров И. П., ДАН СССР, 89, (1953), 781—784.

В. А. Залгаллер (*Ленинград*). **Об основах теории двумерных многообразий ограниченной кривизны.** В работе [1] А. Д. Александров формулировал основы теории двумерных метрических многообразий ограниченной кривизны. Эта теория, включая внутреннюю геометрию регулярных поверхностей и многогранников, распространяется на более общие пространства, в которых сохраняют смысл понятия геодезических линий, углов, $\bar{\alpha}$ между ними, интегральной кривизны, площади и т. п. Одно из налагаемых условий состоит в требовании ограниченности суммы абсолютных избытков для любой системы неналегающих треугольников T_i, лежащих в компактной области G:

$$\sum_i |\bar{\alpha} + \bar{\beta} + \bar{\gamma} - \pi| \leqslant M(G). \tag{*}$$

В основе теории лежат следующие результаты, показывающие, что исследуемые пространства составляют своего рода замыкание класса многогранных (или, что то же, римановых) пространств:

1) Метрика рассматриваемого пространства в пределах всякой компактной области может быть равномерно приближена многогранными метриками с ограниченными в совокупности абсолютными кривизнами.

2) Всякое двумерное многообразие с внутренней метрикой, которая в любой компактной области допускает равномерное приближение многогранными метриками с ограниченными в совокупности абсолютными кривизнами, является двумерным многообразием ограниченной кривизны.

Настоящее сообщение посвящено усилению этих двух теорем. Устанавливается, во-первых, что значительно меньшие априорные условия, именно, ограниченность сумм только положительных избытков для систем неналегающих треугольников (притом треугольников простейшего вида), ограниченность локальная, в окрестности каждой точки, уже обеспечивают возможность приближения рассматриваемой метрики в любой компактной области многогранными метриками с ограниченными в совокупности абсолютными кривизнами. Во-вторых, из возможности локального приближения внутренней метрики двумерного многообразия многогранными метриками с равномерно ограниченными положительными кривизнами уже может быть выведена равномерная ограниченность отрицательных кривизн этих метрик в более узких областях и выполнение условия (*) для предельного пространства.

Лит. 1. Александров А. Д., ДАН СССР 60, № 9, (1948).

В. Д. Измайлов (*Свердловск*). **К теории гиперповерхности пространства аффинной связности.** Как известно, всякое оснащение (нормализация) поверхности X_m в пространстве аффинной связности L_n индуцирует на X_m аффинную связность, зависящую от произвола в выборе указанной нормализации. Если L_n является римановым, то с каждой точкой X_m связано $n-m$-направление, нормальное касательной плоскости к X_m. Это поле локальных нормальных $n-m$-направлений и образует естественное оснащение X_m. Возникает задача и для поверхностей пространства аффинной связности найти такую внутреннюю геометрию и такое их оснащение, которые бы определялись внутренними инвариантными средствами, зависящими лишь от самой поверхности. Указанная проблема решена лишь для немногих частных случаев.

В резюмируемой работе задача решается для так называемых невырожденных (вырожденные поверхности — аналог развертывающихся поверхностей) гиперповерхностей пространства аффинной связности. Этот результат является упрощением и усилением варианта теории гиперповерхности. Если X_{n-1} задана в L_n, отнесенном к системе голономных координат ξ^i уравнениями

$$\xi^i = \xi^i(u', \ldots u^{n-1}), \qquad i = 1,\ 2, \ldots n,$$

а $\Gamma^i_{jk}(\xi^s)$ — объект связности в L_n, то от функций $\xi^i(u^\alpha)$ и $\Gamma^i_{jk}(\xi^s)$ требуется соответственно трехкратная и двукратная дифференцируемость. В остальном объект Γ^i_{jk} может быть совершенно произволен, в частности, он может обладать и кривизной и кручением.

Решение основано на теореме: если на невырожденной гиперповерхности X_{n-} в L_n задан объект Γ_σ, преобразующийся по закону

$$\Gamma_{\sigma'} = \Gamma_\sigma \frac{\partial u^\sigma}{\partial u^{\sigma'}} + \frac{\partial u^{\alpha'}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u^{\alpha'} \partial u^{\sigma'}},$$

то на ней инвариантными средствами можно определить аффинную связность $\Gamma^{\sigma\beta}_\alpha$ такую, что $\Gamma^\sigma_{\alpha\sigma} = \Gamma_\alpha$.

Следствием этой теоремы является утверждение, что всякий $n-1$ вектор на X_{n-1} индуцирует аффинную связность. В частности, если объемлющее пространство трехмерно, то всякий бивектор на X_2 и пара различных скалярных полей также определяют на X_2 некоторую геометрию аффинной связности.

Если L_n является римановым, а в качестве Γ_α взять $\Gamma_\alpha = \partial_\alpha \ln \sqrt{|g|}$, где g — дискриминант метрического тензора $g_{\alpha\beta}$, то связность $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ совпадает с объектом Кристоффеля для тензора $g_{\alpha\beta}$.

Полученный результат можно интерпретировать также и следующим образом. Если на X_{n-1} дан инвариантный интеграл

$$\int\limits_G F du^1 \ldots du^{n-1},$$

то к нему можно присоединить аффинную связность так, что элемент интеграла будет сохраняться при параллельном перенесении в этой связности. Поэтому величину интеграла можно назвать площадью области G.

Сформулированная задача решается путем инвариантного определения на X_{n-1} функций Γ_σ.

Если L_n является плоским E_3, то построенная связность и внутренняя нормализация совпадают со связностью и оснащением Бляшке.

Н. И. Кованцов (*Москва*). **Линейчато-геометрический аналог триортогональной системы поверхностей.** Каждый линейчатый комплекс естественным образом разлагается на три двупараметрических семейства главных поверхностей (так называются линейчатые поверхности комплекса, у которых линии прикосновения с соответствующими конусами комплекса являются их асимптотическими линиями). В общем случае главные поверхности, принадлежащие к двум различным семействам, не расслаиваются в однопараметрическое семейство конгруенций. Если же потребовать такого расслоения для какой-нибудь одной пары семейств главных поверхностей, то оказывается, что

1) каждая из двух остающихся пар также расслаивается в однопараметрическое семейство конгруенций;

2) все получающиеся таким образом конгруенции являются конгруенциями W. При этом, если расслаиваются, например, семейства (Σ_1) и (Σ_2), то фокусы принадлежащих такому расслоению конгруенций W совпадают с точками прикосновения поверхностей семейства (Σ_3), а соответствующие друг другу асимптотические линии на фокальных поверхностях конгруенций оказываются асимптотическими линиями и на главных поверхностях Σ_1 и Σ_2 (которые, таким образом, эти линии соединяют).

Учитывая, что главные поверхности попарно пересекают друг друга инволютивно, что является проективным аналогом ортогонального пересечения двух кривых, можно рассматривать полученный комплекс как линейчато-геометрический аналог триортогональной системы поверхностей. При этом главные поверхности играют роль линий кривизны, три однопараметрических семейства конгруенций W — роль трех семейств Ламе. Произвольную линейчатую поверхность, принадлежащую комплексу, можно трактовать как линию в пространстве, а соприкасающуюся с ней квадрику Ли — как соприкасающуюся окружность этой линии. В связи с тем, что развертывающиеся поверхности оказываются определенным образом самоинволютивными, то их естественно уподобить изотропным кривым поверхностей триортогональной системы.

В частности, триортогональной системе, образованной нормальными траекториями конгруенций прямых или окружностей, соответствует комплекс, у которого все главные поверхности одного двупараметрического семейства (Σ_3) вырождаются в квадрики. У таких комплексов линии прикосновения поверхностей семейства (Σ_3) оказываются прямыми и образуют расслояемую пару конгруенций. Расслаивающими поверхностями являются при этом фокальные поверхности конгруенций W семейства (Σ_1, Σ_2).

Комплексы допускают группу автоморфизмов относительно квадрик, при которых конгруенции семейства переходят друг в друга. При этих автоморфизмах каждая пара точек прикосновения главных поверхностей Σ_1 и Σ_2 описывает соответствующую пару лучей также некоторой расслояемой пары конгруенций, причем расслаивающими поверхностями оказываются фокальные поверхности двух соответствующих семейств конгруенций (Σ_1, Σ_3) и (Σ_2, Σ_3).

Аналогом триортогональной системы, у которой одно семейство Ламе состоит из сфер или плоскостей, являются комплексы проективного вращения. Эти комплексы характеризуются наличием на каждом луче двух двойных инфлекционных центров и представляют собой совокупность всех прямых, пересекающих соответствующие образующие двух линейчатых поверхностей, которые в свою очередь являются фокальными поверхностями некоторой конгруенции W. Роль поверхностей семейства Ламе, состоящего из сфер или плоскостей, играют здесь линейчатые конгруенции, имеющие своими директрисами указанные пары прямолинейных образующих фокальных поверхностей.

Впервые к аналогии между линейчатой геометрией и так называемой высшей геометрией сфер пришел С. Ли в 1871 г. [1]. В тесной связи с этим стоит обнаруженная Ф. Клейном в том же году [2] определенная параллель между линейчатой геометрией и конформной геометрией четырехмерного точечного пространства. Эта параллель дала ему, в частности, возможность построить четырежды инволютивную систему комплексов как аналог четырежды ортогональной системы поверхностей четырехмерного пространства. Тогда же им были указаны и главные поверхности комплекса как аналог линий кривизны гиперповерхности такого пространства. В 1948 г. А. М. Васильев [3] пришел к инволютивной системе комплексов, минуя путь клейновской аналогии. Распространения линейчато-конформной аналогии на отдельно взятый комплекс и триортогональную систему поверхностей с выделением на этом пути конкретных частных классов комплексов нам не приходилось встречать.

Лит.: 1. Lie S., Math. Ann. 5, (1872). 2. Klein F., Math. Ann. 5, (1872). 3. Васильев А. М., ДАН СССР **61**, № 2, (1948).

В. И. Коровин (*Москва*). **Трижды сопряженные системы поверхностей.** 1. Построение точечных и тангенциальных инвариантов трижды сопряженной системы.

2. Трижды сопряженная система R_1, у которой на всех последовательностях Лапласа имеет место соответствие асимптотических линий на фокальных поверхностях. Доказательство существования трижды сопряженной системы R_1.

3. Трижды сопряженная система Ф, поверхности которой переводятся всеми преобразованиями Лапласа в проективно налагающиеся. Доказательство существования системы Ф.

4. Трижды сопряженная система R_2, у которой все последовательности Лапласа принадлежат линейным комплексам. Доказательство существования системы R_2.

5. Пара трижды сопряженных систем, у которых все последовательности Лапласа образуют последовательности с расслояемыми парами соответствующих конгруенций.

6. Замкнутая трижды сопряженная система поверхностей и доказательство существования такой системы.

И. И. Котов (*Москва*). **О полноте изображений линейчатых поверхностей и поверхностей с круговыми образующими.** 1. Необходимость исследований позиционной и метрической полноты изображений обусловлена рядом причин: применением в практике изображений, построенных без достаточных сведений об аппарате проектирования, стремлением дать более глубокие обоснования начертательной геометрии на основе аксиоматического метода и др.

Вопросы исследования позиционной полноты изображений являются исходными в решении проблемы в целом, поскольку полнота изображения обеспечивает аксонометризацию чертежа.

2. Полными изображениями называются такие чертежи фигур, на которых разрешимы позиционные задачи относительно элементов оригинала. На полном изображении поверхности разрешима задача о возможности рассматривать любую точку чертежа в качестве изображения точки поверхности. Критерием разрешимости этой задачи выставляется возможность построить на чертеже проекцию линии, проходящей через соответствующую точку и принадлежащей рассматриваемой поверхности.

3. Общие соображения о полноте изображений поверхности применимы, в частности, к исследованию вопросов полноты изображений линейчатых поверхностей и поверхностей с круговыми образующими постоянного и переменного радиуса. Можно формулировать теоремы, из которых следуют условия задания полных изображений этих видов поверхностей. При этом изучение полноты изображения поверхностей с круговыми образующими сводится к изучению полноты изображений линейчатых поверхностей. Принципы решения задачи о построении образующих основываются на методе последовательных приближений.

4. Сведение задач на поверхности с круговыми образующими к задачам о линейчатых поверхностях дает возможность предложить новую классификацию поверхностей с круговыми образующими и решить некоторые задачи о преобразованиях этих поверхностей и инвариантах этих преобразований.

Г. И. Кручкович (*Москва*). **О движениях в римановых пространствах.** 1. Как известно, Бианки получил классификацию собственно римановых ($ds^2 > 0$) пространств V_3, допускающих непрерывные группы движений. Показывается, как распространить и дополнить результаты Бианки на случай V_3 с неопределенной метрикой. Имеет место теорема: для того чтобы пространство V_3 (как с $ds^2 > 0$, так и с неопределенной метрикой) допускало нетранзитивную группу движений G_3, необходимо и достаточно, чтобы оно было субпроективным пространством Кагана.

При этом для исключительных субпроективных пространств поверхности транзитивности группы изотропные.

Указываются канонические виды метрик V_3, допускающих группу G_4, и приводятся их инвариантные признаки:

А) Если V_3 допускает ортогональный репер главных направлений Риччи, то 1) корни Риччи $\rho_i = \text{const}$, 2) $\rho_1 = \rho_2 \neq \rho_3$, 3) простому корню отвечает геодезическая конгруенция путей движения.

Б) Если нет ортогонального репера главных направлений Риччи, то 1) для конформно-эвклидовых V_3 существует функция $f(x^i)$, удовлетворяющая уравнениям $f_{,ij} = Kf_{,i}f_{,j}$. Эта функция находится из условия $R_{ij} = Lf_{,i}f_{,j}$. Здесь K, $L = \text{const}$, R_{ij} — тензор Риччи и запятой обозначена ковариантная производная; такие пространства входят в исключительные субпроективные V_3; 2) для неконформно-эвклидовых пространств V_3:

$$R_{ij} + \rho g_{ij} = \pm \mu_i \mu_j,$$

$$\text{где } \rho \neq 0,\ \mu_i = \lambda f_{,i},\ \mu_{i,j} + \mu_{j,i} = 0.$$

Симметрические V_3 допускают группу движений G_4 тогда и только тогда, когда

$$R_{ij} + Kg_{ij} = Lf_{,i}f_{,j}, \quad f_{,ij} = 0 \quad (K,\ L = \text{const}).$$

2. В дополнение к результатам Фубини о движениях в пространстве V_4 изучаются V_4 с нетранзитивной группой движений, действующей на изотропных поверхностях транзитивности. Находятся все V_4, допускающие указанные группы G_3 и G_4. Нетранзитивная группа, большая, чем G_4, допускается в этих случаях только тогда, когда G_4 содержит абелеву подгруппу G_3. Метрика V_4 приводится в некоторой системе координат к виду

$$ds^2 = 2dx^1dx^4 + \alpha(x^4)\,dx^{2^2} + 2\beta(x^4)\,dx^2dx^3 + \gamma(x^4)\,dx^{3^2}, \quad \alpha\gamma - \beta^2 \neq 0.$$

Такое пространство V_4 автоматически допускает нетранзитивную группу G_5, которая содержится в нетранзитивной G_6, если это — исключительное субпроективное пространство. В связи с этим формулируется общая теорема:

Для того чтобы V_4 допускало нетранзитивную группу G_6, необходимо и достаточно, чтобы оно было субпроективным пространством Кагана.

3. Вопрос о единственности разложения приводимого риманова пространства $V_n\left(ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2\right)$ тесно связан с наличием в нем «перемешивающих» движений. Именно, разложение не единственно, если ds_1^2 и ds_2^2 допускают абсолютно параллельные векторные поля и все разложения получаются друг из друга движениями, перемешивающими эти абсолютно параллельные векторные поля из разных ds_i^2. Доказывается, что пространство V_n, имеющее q независимых абсолютно параллельных векторных полей, допускает группу движений, зависящую по крайней мере от $\frac{q(q+1)}{2}$ параметров.

4. Полуприводимым называется такое пространство V_n, метрика которого приводится в некоторой системе координат к виду

$$ds^2 = ds_0^2 + \sigma ds_1^2,$$

где ds_0^2 и ds_1^2 — самостоятельные метрики, а функция σ зависит от переменных из ds_0^2. Базис группы движений полуприводимого V_n можно выбрать так, чтобы он состоял из: 1) операторов движений в ds_1^2, 2) операторов, дающих движения в ds_0^2, переводящие σ в $c\sigma$, и представляющих преобразования подобия с коэффициентом $\frac{1}{c}$ в ds_1^2, и 3) «перемешивающих» операторов. В случае, когда $ds_0^2 = dx^2$, перемешивающие движения возможны только тогда, когда сама метрика ds^2 и метрика ds_1^2 определяют пространство $V(K)$. (Так названо полуприводимое пространство, у которого «присоединенная» метрика $ds^{*2} = ds_0^2 + \sigma dy^2$ имеет постоянную кривизну). Полностью рассмотрен случай двумерной метрики ds_0^2.

Б. Л. Лаптев (*Казань*). **Производная Ли от геометрических объектов в пространстве опорных элементов.** Производная Ли, введенная для тензоров и объектов связности в X_n Слебодзинским (1931—1932), а затем — с более полным исследованием свойств — Схоутеном и Ван Кампеном (1933), была построена автором (1938) в пространствах линейных элементов. В дальнейшем понятие производной Ли от дифференциально-геометрического объекта было рассмотрено В. В. Вагнером (1945) в X_n и введено автором в пространствах опорных элементов (x^α, ω^i), где ω^i — дифференциально геометрический объект, причем были изучены ее свойства и дан ряд приложений (1950, 1954).

В настоящем сообщении выделяется тип геометрических объектов, включающий дифференциально-геометрические объекты, для которого обращение производной Ли в нуль определяет (в случае интегрируемости полученных уравнений) конечную или бесконечную псевдогруппу преобразований. Указываются приложения в теории автоморфизмов пространств опорных элементов с фундаментальным объектом и в теории вариаций кратных интегралов.

А. Е. Либер (*Саратов*). **О геометрии m-поверхностей в аффинных и проективных пространствах.** Геометрия оснащенных m-поверхностей в аффинных и проективных пространствах развита достаточно хорошо. Теперь задача заключается в построении инвариантного (т. е. определяемого самой m-поверхностью) оснащения. Приводится решение этой задачи в том случае, когда соприкасающееся подпространство второго порядка совпадает со всем пространством. Когда это не имеет места, задача построения инвариантного оснащения более сложна, однако удается показать, что эта задача может быть сведена к задаче инвариантного построения на m-поверхности объекта линейной аффинной связности. В общем случае можно указать два пути инвариантного определения на m-поверхности объекта аффинной связности.

Первый путь пригоден для m-поверхностей в центрально-аффинном n-пространстве E_n или проективном n-пространстве P_n и заключается в следующем. Пусть в E_n задана m-поверхность S. Рассмотрим несущее пространство M_N симметризированного m-кратного кронекерова произведения матрицы центрально-аффинного преобразования. Поверхности S однозначно соответствует некоторая поверхность F в M_N, определяемая уравнением $\bar{r} = \bar{r}(\eta^a)$, $a = 1, \ldots, m$. Совокупность всех частных производных от $\bar{r}$ по η^a до порядка $n-1$ включительно вместе с вектором $\bar{r}$ определяет базис пространства M_N. Совокупность коэффициентов при частных производных порядка $n-1$ от r по η^a в разложении частных производных порядка n от $\bar{r}$ по η^a по указанному базису определяет объект второго класса, свертывание которого приводит к искомому инвариантно определенному объекту аффинной связности на поверхности S в E_n. Для m-поверхности в проективном n-пространстве задача решается аналогично, только предварительно приходится определить инвариантно аффинную связность в радиальном составном многообразии, определяемом m-поверхностью, что при некоторых предположениях удалось сделать.

Второй путь пригоден для всех аффинных пространств (обще-аффинных, центрально-аффинных, эквиаффинных и т. д.). Рассмотрим в E_n m-поверхность S. Пусть B есть соприкасающееся подпространство (в точке $P \in S$) максимальной размерности, меньшей, чем n. Будем говорить, что задано частичное оснащение поверхности S, если с каждой точкой $P \in S$ сопоставлено разложение всего пространства в прямую сумму $B \dot{+} {}^*B$, где ${}^*B$ — некоторое дополнительное подпространство, называемое частично оснащающим. Доказывается, что задание частичного оснащения определяет на поверхности S объект аффинной связности (зависящий от частичного оснащения), с помощью которого удается, при некоторых предположениях, построить на поверхности S инвариантно определенный объект аффинной связности.

Отдельно изучаются двумерные поверхности в аффинных и проективных n-пространствах при $n \geqslant 5$. На таких поверхностях удается инвариантно определить симметричный псевдотензор валентности $p > 2$. В общем случае оказывается возможным построить объект аффинной связности, компоненты которого являются определенными функциями данного псевдотензора. Построенный таким образом объект аффинной связности будет инвариантно определен на двумерной поверхности.

А. Е. Либер (*Саратов*). **К теории геометрических объектов.** 1. Рассматриваются геометрические объекты в простом пространстве Клейна K_n. Устанавливаются необходимые и достаточные условия того, что данные функции от компонент геометрического объекта заданного типа в свою очередь определяют геометрический объект данного типа. Далее, приводится общее определение псевдогеометрических объектов, являющихся важным специальным случаем многозначных геометрических объектов, и отмечается связь псевдогеометрических объектов со связующими геометрическими объектами двух пространств Клейна. Для подгрупп группы всех автоморфизмов пространства K_n найдены характеристические псевдогеометрические объекты и указан путь отыскания характеристических геометрических объектов.

2. Предыдущие результаты применяются конкретно к геометрическим объектам в центрально-аффинном n-пространстве E_n. Кроме того, в E_n выделены некоторые достаточно общие типы линейных геометрических объектов, названных линеарами; всякий линейный геометрический объект в E_n есть объединение нескольких линеаров. Доказывается, что характеристическим геометрическим объектом любой однопараметрической неэквиаффинной подгруппы группы всех автоморфизмов пространства E_n является некоторый линеар.

3. В n-пространстве X_n изучаются поля линеаров. При наличии в X_n заданной аффинной связности легко находится явное выражение для ковариантной производной от поля линеара любого данного типа. Для поля линеара некоторого простого типа (типа A) в X_n указан путь построения объекта аффинной связности, компоненты которого являются вполне определенными функциями от данного линеара и его дифференциального продолжения. Далее, доказана теорема приведения для дифференциальных комитантов поля линеара типа A и X_n.

В. С. Люкшин (*Москва*). **Векторный способ преобразования системы дифференциальных уравнений к простой форме.** 1. Многие задачи дифференциальной геометрии, теории деформации и других прикладных дисциплин приводят к системам дифференциальных уравнений в частных производных, не являющихся системами Коши—Ковалевской. Главными вопросами при изучении таких систем являются вопросы существования и единственности решения, а также особые решения и все условия совместности системы.

Теории Рикье и Томаса позволяют указать способ преобразования системы к так называемой простой и стандартной форме. Если преобразованная система окажется пассивной, то получаются все условия совместности, и если получившаяся система определенная, то имеет место теорема о существовании и единственности решения системы. Выделяются особые решения.

2. Как правило, алгебраические и дифференциальные вычисления огромны. Успех исследования во многом зависит от преодоления вычислительных трудностей.

Для одного вида системы

$$\vec{r}_i \vec{r}_j = \mu_{ij} \tag{1}$$

предлагается векторный способ преобразования системы к простой форме. В простейшем случае три неизвестные координаты вектора $\vec{r}\{x, y, z\}$ зависят от u^1, u^2, u^3, $\vec{r}_k = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^k}$ ($k = 1, 2, 3$), μ_{ij} — известные аналитические функции от u^1, u^2. u^3.

3. Теория применяется к изучению конечных деформаций непрерывной среды. Они описываются системой (1), где $\vec{r}$ — вектор смещения точки среды с координатами (u^1, u^2, u^3) и μ_{ij} выражаются через компоненты деформации ε_{ij} по формулам:

$$\mu_{ii} = 2\varepsilon_{ii} + 1, \quad \mu_{ij} = \varepsilon_{ij} \quad (i \neq j).$$

4. Простая форма системы (1) имеет вид:

$$\left.\begin{array}{llll} \vec{r}_1\vec{ri} = \mu_{1i}, & (\vec{ri})^2 = \mu^{ii}, & \mu^{ij}x_i x_j = 1 & (i,\ j = 1,\ 2,\ 3) \\ z_1 z_2 z_3 \neq 0, & pqr \neq 0 & (\mu_{11} - x_1^2)(\mu_{22} - x_2^2) \neq 0, & \mu\mu^{33}\mu_{11}\mu_{22} \neq 0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

где $(\vec{r}^1, \vec{r}^2, \vec{r}^3)$ — репер, сопряженный с репером $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$, $\mu = \det \| \mu_{ij} \|$.

5. Приведение простой системы (2) к пассивной системе требует присоединения к (2) условий совместности

$$R_{kijl} = 0 \qquad (3)$$

R_{kijl} — тензор (Римана—Христоффеля), порожденный метрическим тензором μ_{ij}.

Общность решения системы (2) зависит от шести произвольных постоянных.

6. Тем же методом исследуется совместность системы (3) относительно μ_{ij} и устанавливается произвол выбора этих функций. Система (3) совместная, а общность решения зависит от трех произвольных функций, каждая от двух аргументов, и четырех произвольных функций от одного аргумента.

В. А. Маневич (*Москва*). **О представлении элементов систем коллинеаций II и III ступени в виде произведения двух полярных соответствий и о некоторых свойствах коллинеаций, связанных с этим вопросом.** 1. В своей работе [1] А. К. Власов указывает на связь пучка коллинеаций на плоскости с пучком конических сечений.

Представление коллинеации в виде $C \equiv \Pi_1 \cdot \Pi_2$, где Π_1 и Π_2 — некоторые определенные полярные соответствия, оказывается очень удобным при рассмотрении ряда вопросов.

Поэтому возник вопрос о возможности представления в таком виде любого коллинеарного соответствия на плоскости.

2. Разрешению этого вопроса посвящена первая часть работы, в которой мы рассматриваем произвольное коллинеарное соответствие, заданное тремя главными точками U_1, U_2, U_3 и парой соответственных прямых (или точек).

Для представления этого коллинеарного соответствия в виде $C \equiv \Pi_1 \cdot \Pi_2$ мы строим полный четырехугольник $MHKP$, диагональными точками которого являются точки U_1, U_2, U_3.

Точки M, H, K, P определяют пучок конических сечений $|K^2|$. Из пучка $|K^2|$ выделяем две кривые второго порядка K_1^2 и K_2^2, относительно которых данная коллинеация представляется в виде $C \equiv \Pi_1 \cdot \Pi_2$.

3. Далее показано, что любую сеть коллинеаций можно рассматривать как полярную систему некоторого пучка конических сечений, причем этот пучок не является единственным, и что всякое коррелятивное соответствие можно рассматривать как произведение трех полярных соответствий.

4. Вторая часть работы посвящена решению задачи о представлении коллинеации в пространстве в виде произведения двух полярных соответствий, а также некоторым вопросам, связанным с решением этой задачи.

В этой части дается определение пучка поверхностей второго порядка как совокупности поверхностей второго порядка, проходящих через пространственную кривую γ^4 четвертого порядка, и доказывается эквивалентность этого определения с определением пучка поверхностей второго порядка, приведенным у А. К. Власова [2].

Мы рассматриваем коллинеарное соответствие в пространстве, заданное четырьмя главными точками S, S_1, A, B и парой соответственных точек P, P^1, и строим пучок поверхностей второго порядка, для которого SS, AB является полярным тетраэдром (такой пучок не единственный). Показываем, что представление коллинеарного соответствия в виде произведения двух полярных соответствий, если и возможно, то не для всякого пучка поверхностей второго порядка, для которого SS, AB будет полярным тетраэдром. Отыскиваем такой пучок, относительно которого возможно представление коллинеарного соответствия в пространстве в виде $C \equiv \Pi_1 \cdot \Pi_2$. Пучки плоскостей, соответствующие точкам P и P^1 относительно этого пучка, имеют пересекающиеся носители.

5. Далее показано, что геометрическое место полюсов произвольной плоскости α относительно пучка поверхностей второго порядка $|F^2|$ есть пространственная кривая третьего порядка f^3, проходящая через вершины полярного тетраэдра пучка $|F^2|$.

Лит.: 1. Власов А. К., Линейные системы конических сечений в их проективном и метрическом строении. М., 1909. 2. Власов А. К., Полярные системы высших порядков в формах первой ступени. М., 1909.

М. А. Николаенко (*Харьков*). **О характеристиках монжева уравнения.** В работах Д. М. Синцова были исследованы для системы интегральных кривых монжева уравнения

$$\Omega(xyz;\ dx,\ dy,\ dz) = 0$$

аналоги линий кривизны, асимптотических и геодезических линий.

В докладе дается распространение на эти системы сопряженных направлений.

Доказывается, что характеристики уравнения в частных производных первого порядка, определяемого монжевым уравнением, могут быть получены непосредственно по самому монжеву уравнению.

Имеет место теорема: если интегральная кривая монжева уравнения обладает двумя из трех свойств: 1) быть геодезической «прямейшей», 2) быть геодезической «кратчайшей», 3) быть характеристикой, то она обладает и третьим свойством.

А. П. Норден (*Казань*). **О геометрическом истолковании некоторых понятий спинорного анализа.** Биаксиальным называется пространство, фундаментальная группа которого изоморфна подгруппе проектных преобразований трехмерного пространства, сохраняющих две непересекающиеся прямые. Эти прямые называются абсолютными, а действительные прямые, пересекающие обе абсолютные, — особыми. Линейная конгруенция особых прямых принадлежит комплексам, образующим пучок, который называется абсолютным. В абсолютном пучке устанавливается метрика эллиптического типа, позволяющая определить угол между двумя прямыми, который обращается в нуль для двух псевдопараллельных прямых, т. е. прямых, принадлежащих одному комплексу абсолютного пучка. На всякой плоскости определяется эвклидова геометрия так, что ее угловая метрика и параллелизм согласуются с угловой метрикой и параллелизмом внешнего пространства. Особые прямые устанавливают между двумя любыми плоскостями соответствие, которое оказывается круговым и называется главным. Линейчатая поверхность второго порядка, содержащая семейство особых образующих, называется сфероидом и пересекается со всякой не касающейся ее плоскостью по окружности.

Четырехмерное аффинное пространство называется биаффинным, если его фундаментальная группа сохраняет некоторую биаксиальную метрику, заданную в его несобственной гиперплоскости. Подгруппа биаффинных движений, переводящих в себя каждый комплекс абсолютного пучка, изоморфна группе Лоренца четырехмерного пространства. Этот факт позволяет изобразить всякий псевдовектор лоренцева пространства сфероидом, а всякий спинвектор — вектором биаффинного пространства.

Н. М. Остиану (*Москва*). **О геометрии поверхностей многоморфного аффинно-симплектического пространства.** Изучается четномерная поверхность (размерности n) в четномерном аффинно-симплектическом пространстве (размерности N). Это пространство можно рассматривать как проективное пространство, в котором зафиксирована гиперплоскость (несобственная гиперплоскость) и невырожденный линейный комплекс прямых в ней (абсолютный комплекс).

При исследовании применяется инвариантный метод Г. Ф. Лаптева, а также используются непосредственные геометрические построения.

Получены следующие результаты:

1. Найден основной фундаментальный объект поверхности. Его порядок или совпадает, или на единицу меньше порядка линейного соприкасающегося пространства наинизшей размерности, вмещающего поверхность. Поле этого объекта опреде-

ляет поверхность с точностью до симплектического преобразования и охватывает поля с любыми образующими объектами, инвариантно присоединенные к поверхности.

2. На поверхности инвариантно определена симплектическая связность без кручения, ее тензор кривизны охватывается фундаментальным объектом второго порядка.

3. В общем случае найдена эвклидова связность, инвариантно присоединенная к поверхности. Тензоры кручения и кривизны этой связности охватываются фундаментальным объектом четвертого порядка.

4. Каждое направление кривизны, т. е. направление, вдоль которого семейство нормальных плоскостей — фокальное, симплектически ортогонально ко всем направлениям, сопряженным ему.

5. Если размерность поверхности равна половине размерности объемлющего пространства, то при смещении поверхности в любом направлении соседние нормальные пространства пересекаются в точке. Геометрическим местом таких точек, соответствующих некоторой точке исходной поверхности, является поверхность порядка n, обладающая центральной симметрией относительно исходной точки, — поверхность центров. Двум несимметричным точкам поверхности центров, лежащим на прямой, проходящей через центр, соответствуют на исходной поверхности симплектически ортогональные направления.

6. Двумерная поверхность в четырехмерном симплектическом пространстве определяет в несобственной гиперплоскости конфигурацию T Финикова, образованную двумя конгруенциями несобственных прямых касательной и нормальной плоскостей и двумя конгруенциями, принадлежащими абсолютному комплексу.

7. Выделен класс n-мерных поверхностей в $2n$-мерном пространстве, которые определяют в несобственной гиперплоскости конфигурацию, состоящую из двух абсолютно фокальных n-параметрических семейств $(n - 1)$-мерных плоскостей и из n фокальных семейств прямых, принадлежащих абсолютному комплексу.

При $n=2$ эта конфигурация становится конфигурацией T Финикова, а поверхность — произвольной двумерной поверхностью четырехмерного пространства.

Ю. Е. Пензов (*Саратов*). **Классификация геометрических объектов.** 1. Начало классификации геометрических объектов было положено Схоутеном и Хантьесом в 1936 г. В дальнейшем этой задаче уделяли внимание многие русские и иностранные ученые: Голомб, Дубнов, Вагнер, Рашевский, Либер, Пензов и др.

Общий метод отыскания геометрических дифференциальных объектов класса v в X_n установлен В. В. Вагнером в 1945 г. Дело сводится к отысканию непрерывных транзитивных представлений полной дифференциальной группы $\vartheta^{(v,n)}$, которая является группой Ли.

2. Простейший случай — геометрические дифференциальные объекты класса v размерности 1. Задача классификации их требует определения всех замкнутых подгрупп максимальной размерности группы $\vartheta^{(v,n)}$.

Установлено, что: 1) в X_n при $n \geqslant 2$ не существует одномерных объектов, класс которых больше 1; в X_1 класс одномерных объектов не превышает 3; 2) все одномерные объекты 2-го класса в X_1 подобны собственным или несобственным объектам аффинной связности; 3) все одномерные объекты 3-го класса в X_1 подобны собственным или несобственным объектам проективной связности.

При отыскании одномерных объектов 1-го класса автор определял соответствующие им подгруппы компоненты единицы группы $\vartheta^{(v,n)}$ и таким образом были найдены простейшие одномерные объекты 1-го класса в произвольном X_n. Для случая X_1 все одномерные объекты 1-го класса были найдены Хантьесом и Ламаном в 1953 г. Они к понятию геометрического объекта подошли с точки зрения теории косых произведений.

3. Относительно геометрических дифференциальных объектов класса v размерности 2 установлено: класс двумерных объектов в X_n при $n = 1$ не превышает 5 при $n = 2$ не превышает 2, при $n = 3$ не превышает 1; в X_n при $n \geqslant 4$ двумерных объектов не существует. Для двумерных объектов в X_1, X_2 и X_3 найдены все соответствующие им подалгебры алгебры Ли группы $\vartheta^{(v,n)}$, соответствующие этим

подалгебрам подгруппы в компоненте единицы группы $\vartheta^{(r,n)}$ и транзитивные объекты, определяемые последними. В X_1 с точностью до подобия существует семь типов таких объектов, среди них один объект 5-го класса, два — 4-го, три — 3-го и один — 2-го класса. В X_2 все такие объекты 2-го класса подобны либо свернутому объекту аффинной связности, либо объектам, уравнения преобразования компонент которых имеют вид:

$$\begin{cases} \Omega_{1'} = (A^1_{1'}\Omega_1 + A^2_{1'})(A'_{2'}\Omega_1 - A^2_{2'})^{-1}, \\ \Omega_{2'} = \Delta^{-1}(A^1_{2'}\Omega_1 + A^2_{2'})^{-1}\left\{\Omega_2 - (A^{\alpha'}_1 - \Omega_1 A^{\alpha'}_2)\dfrac{\partial \ln \Delta}{\partial \xi^{\alpha'}}\right\} \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \Omega_{1'} = (A^1_{1'}\Omega_1 + A^2_{1'})(A^1_{2'}\Omega_1 + A^2_{2'})^{-1}, \\ \Omega_{2'} = \Delta^{-2}(A^{\alpha}_{2'}U_{\alpha})^{-3}\left\{\Omega_2 + (A^{\alpha}_{1'1'}A^{\beta\gamma}_{2'2'} - 2A^{\alpha}_{1'2'}A^{\beta\gamma}_{1'2'} + A^{\alpha}_{2'2'}A^{\beta\gamma}_{1'1'})U_\alpha U_\beta U_\gamma\right\} \end{cases}$$

$$(U_1 = \Omega_1, \quad U_2 = 1).$$

Объекты 1-го класса в X_2 подобны одному из следующих: 1) ковариантной векторной плотности K некоторого веса; 2) совокупности двух объектов K; 3) объединению скалярной плотности веса 1 и объекта K; 4) отношению двух компонент ковариантного тензора к его третьей компоненте. В X_3 все такие объекты подобны либо ковариантному, либо контравариантному двумерным объектам K, компоненты которых преобразуются так же, как отношения первых двух координат к третьей для ковариантного и контравариантного векторов соответственно.

4. Для дифференциальных геометрических объектов класса v в X_1 размерность и класс их связаны условием: максимальный класс объектов размерности N равен $2N+1$. Построен пример объекта максимального класса произвольной размерности N; в случае $N=2$ уравнения преобразования его компонент имеют вид:

$$'\Omega_1 = \frac{\Omega_1}{f'} - \frac{f''}{f'^2},$$

$$'\Omega_2 = \frac{\Omega_2}{f'^4} + 45\Omega_1^3\frac{f''}{f'^5} - 5\Omega_1^2\left(12\frac{f''^2}{f'^6} + \frac{f'''}{f'^5}\right) - 5\Omega_1\left(4\frac{f''f'''}{f'^6} - 12\frac{f''^3}{f'^7} - \frac{f^{(IV)}}{f'^5}\right) +$$

$$+ 5\left(\frac{f'''^2}{f'^6} - 4\frac{f''^2 f'''}{f'^7} + \frac{f'' f^{IV}}{f'^6}\right) - \frac{f^{(V)}}{f'^5}$$

В. Н. Первикова (*Москва*). **Основная теорема центральной аксонометрии для пространства n измерений.** 1. В теории многомерной аксонометрии основная проблема состоит в доказательстве предложений, связанных с проектированием пространственных n-мерных координатных систем, с заданием их изображений в K-мерной плоскости (при $n > K \geqslant 2$) и с реконструкцией упомянутых координатных систем по заданным изображениям.

2. В связи с этим исследуется вопрос, как и при каких условиях наперед заданное K-мерное изображение $\mathfrak{T}_1$ может быть принято за центральную проекцию произвольной n-мерной проективной системы координат $\mathfrak{T}$ на K-мерную плоскость.

3. Дается доказательство основной теоремы в частном ее виде, когда $K = n - 1$. При этом выясняется, что наперед заданная $(n-1)$-мерная конфигурация $\mathfrak{D}_1$, имеющая символ $(C^2_{n+2})_n$, $(C^3_{n+2})_3$, может быть принята с точностью до унимодулярно аффинного преобразования за центральную проекцию на гиперплоскость произвольной n-мерной конфигурации $\mathfrak{D}$ того же символа, задание которой равносильно заданию проективной системы координат n-мерного пространства.

4. Исходя из этого, доказывается основная теорема многомерной центральной аксонометрии в общем виде, когда $n - 1 > K \geqslant 2$. Из нее следует, что наперед заданная K-мерная фигура $\mathfrak{T}_1$, представляющая собой полное изображение какой-либо n-мерной проективной системы координат в K-мерной плоскости, может быть с точностью до унимодулярно аффинного преобразования принята за центральную проек-

цию на K-мерную плоскость любой n-мерной проективной системы координат $\mathfrak{T}$, заданной любым способом. Для доказательства теоремы введены понятия обратных проекций и структуры проектирования, а также рассмотрены основные их свойства.

5. В заключение устанавливается число решений и выявляются условия, при которых доказанная теорема имеет место. Рассматриваются также частные случаи, соответствующие этим условиям.

П. И. Петров (*Казань*). **Принцип классификации римановых многообразий по их дифференциальным инвариантам и его применения.** В 1934 г. на Первой международной конференции по тензорной дифференциальной геометрии и ее приложениям И. А. Схоутен констатировал отсутствие принципа классификации римановых пространств. Содержание доклада имеет целью восполнить этот пробел, указав одно общее правило классификации V_n.

В качестве применения сформулированного общего правила дается классификация многообразий V_3, V_4, конформно-плоских V_4 и пространств Эйнштейна четырех измерений.

А. В. Погорелов (*Харьков*). **Поверхности ограниченной внешней кривизны.** Гладкая поверхность называется поверхностью ограниченной внешней кривизны, если площадь ее сферического изображения, с учетом кратности покрытия, конечна.

1. Для поверхностей ограниченной внешней кривизны естественным образом с помощью сферического отображения определяются положительная, отрицательная и полная кривизны на любом множестве. Эти кривизны, как функции множеств, вполне аддитивны на кольце борелевских множеств.

Поверхности, у которых положительная и отрицательная кривизны равны нулю,— развертывающиеся и имеют обычное для развертывающихся поверхностей строение с прямолинейными образующими и стационарной касательной плоскостью вдоль каждой образующей. Если поверхность полная, то она цилиндрическая. Поверхность с плоским краем, у которой отрицательная кривизна равна нулю, — выпуклая. Если поверхность полная, то она либо замкнутая выпуклая, либо бесконечная выпуклая поверхность.

2. Поверхности ограниченной внешней кривизны допускают приближение регулярными поверхностями с равномерно ограниченными абсолютными кривизнами, а следовательно, являются многообразиями ограниченной внутренней кривизны в смысле А. Д. Александрова. Таким образом, для этих поверхностей определены понятия положительной, отрицательной и полной внутренней кривизны. Имеет место теорема Гаусса о равенстве соответствующих внутренних и внешних кривизн.

3. В классе поверхностей ограниченной внешней кривизны поверхности, локально изометричные плоскости, — линейчатые, поверхности с положительной внутренней кривизной — локально выпуклые.

Э. Г. Позняк (*Москва*). **Аппроксимация бесконечно малых изгибаний поверхностей нулевой кривизны.**

1. Характеристика бесконечно малых изгибаний поверхностей нулевой кривизны. Поле скоростей произвольного бесконечно малого изгибания поверхностей нулевой кривизны вдоль прямолинейной образующей является полем скоростей движения этой образующей как твердого тела. Поскольку поле скоростей бесконечно малого изгибания двугранного угла вдоль ребра также является полем движения этого ребра как твердого тела, то, естественно, возникает вопрос об аппроксимации бесконечно малых изгибаний поверхностей нулевой кривизны бесконечно малыми изгибаниями аппроксимирующих эту поверхность особых многогранников — призматоидов.

2. Аппроксимационные теоремы. Показывается, что поле скоростей любого бесконечно малого изгибания куска поверхности нулевой кривизны можно аппроксимировать бесконечно малыми изгибаниями аппроксимирующих эту поверхность призматоидов. Возможность аппроксимации распространяется и на некоторые классы склеенных поверхностей нулевой кривизны.

3. Приложения. Аппроксимационные теоремы позволяют во многих случаях свести задачу о бесконечно малых изгибаниях поверхностей нулевой кривизны к исследованию бесконечно малых изгибаний многогранников, что является чисто алгебраической задачей. В докладе даны некоторые конкретные применения аппроксимационных теорем к определенным классам склеенных поверхностей нулевой кривизны.

Ю. Г. Решетняк (*Ленинград*). **Интегрально-геометрический метод в теории кривых.** Основные понятия теории кривых в дифференциальной геометрии — это кривизна $k(t)$ и кручение $T(t)$.

Вместо них можно рассматривать интегральную кривизну или поворот $\varkappa(t)$ и интегральное или полное кручение $\tau(t)$

$$\varkappa(t) = \int_0^t k(u)\, s'(u)\, du, \qquad \tau(t) = \int_0^t T(u)\, s'(u)\, du,$$

где $s(u)$ — длина дуги кривой. Поворот и полное кручение можно определить непосредственно, не пользуясь понятиями кривизны и кручения, в связи с чем появляется возможность построить кривые, охватывающие, наряду с регулярными кривыми, и некоторые нерегулярные, например ломаные. Такая теория была намечена А. Д. Александровым в 1946 г. При детальном изложении этой теории возник ряд трудностей, которые удалось преодолеть применением специальных интегрально-геометрических соотношений.

Пусть R^n есть n-мерное пространство постоянной кривизны, N_m — множество всех m-мерных плоскостей X_m в R^n. На множестве N_m можно определить меру $\mu(E)$, инвариантную относительно движений пространства R^n. Пусть K — кривая в R^n, $x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — произвольная ее параметризация. Тогда если $y(t)$ — ортогональная проекция точки $x(t)$ на m-мерную плоскость X_m, то $y(t)$, как функция t, определяет некоторую кривую, лежащую в плоскости X_m. Эта кривая обозначается через KX_m и называется проекцией кривой K на плоскость X_m. Пусть $r(t)$ — расстояние между точками $x(t)$ и $y(t)$, а $f(r)$ — функция, определенная при всех $r \geqslant 0$ и достаточно быстро убывающая при $r \to \infty$. Если $\bar{s}(t)$, $\bar{\varkappa}(t)$, $\bar{\tau}(t)$ — длина, поворот и полное кручение кривой KX_m, как функции параметра t, то пусть

$$s_f(X_m) = \int_0^1 f[r(t)]\, d\bar{s}(t), \qquad \varkappa_f(X_m) = \int_0^1 f[r(t)]\, d\bar{\varkappa}(t), \qquad \tau_f(X_m) = \int_0^1 f[r(t)]\, d\bar{\tau}(t).$$

(Если для кривой KX_m одна из величин $s(KX_m)$, $\varkappa(KX_m)$, $\tau(KX_m)$ бесконечна, то соответствующий интеграл считаем равным бесконечности).

Теорема. Для всякой кривой K, такой, что $s(K) < \infty$, $\varkappa(K) < \infty$, $\tau(K) < \infty$,

$$s(K) = A_1 \int_{N_m} s_f(X_m)\, \mu(dX_m),$$

$$\varkappa(K) = A_2 \int_{N_m} \varkappa_f(X_m)\, \mu(dX_m), \qquad \tau(K) = A_3 \int_{N_m} \tau_f(X_m)\, \mu(dX_m),$$

где A_1, A_2, A_3 — постоянные, зависящие только от функции $f(r)$.

Аналогичные теоремы имеют место для интегральных кривизн более высоких порядков.

Ю. Г. Решетняк (*Ленинград*). **Интегрирование по выпуклому многограннику и некоторые вопросы теории линейных неравенств.** Предлагается алгоритм для вычисления объема выпуклого многогранника в n-мерном эвклидовом пространстве E^n, площадей его граней, определения уравнения опорной плоскости, параллельной данной, и т. д., исходя из задания многогранника системой линейных неравенств.

Определение указанных величин сводится к вычислению кратных интегралов от функций нескольких комплексных переменных.

Пусть многогранник M представляет собой совокупность решений системы неравенств

$$f_j(X) \equiv \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k + b_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Как известно, для $l > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{l-i\infty}^{l+i\infty} \frac{e^{x\zeta}}{\zeta} d\zeta = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 1/2 & \text{при } x = 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Полагая в левой части $x = f_j(X)$, получим функцию $\chi_j(X) = 1$ при $f_j(X) > 0$, $\chi_j(X) = 0$ при $f_j(X) < 0$. Произведение $\chi(X) = \chi_1(X) \ldots \chi_m(X)$ равно единице во внутренних точках многогранника M и нулю при $X \in M$. Функцию $\chi(X)$ можно на основании (1) представить в виде кратного комплексного интеграла

$$\chi(x) = \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{l_m-i\infty}^{l_m+i\infty} \cdots \int_{l_1-i\infty}^{l_1+i\infty} \frac{\exp\left\{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k + b_j\right)\zeta_j\right\}}{\zeta_1 \ldots \zeta_m} d\zeta_1 \ldots d\zeta_m. \tag{2}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(X) = \exp\{a_1x_1 + \ldots + a_mx_m\}$. Интегрируя $\varphi(X)\chi(X)$ по достаточно большому параллелепипеду Q, получим интеграл от функции $\varphi(X)$ по пересечению $Q \bigcap M$. Равенство (2) позволяет этот интеграл представить в виде кратного интеграла от функции нескольких комплексных переменных. Вычисление последнего требует конечного числа арифметических действий.

Б. А. Розенфельд (*Москва*). **Неэвклидова геометрия и простые группы Ли.** Как известно, простые группы Ли исчерпываются четырьмя бесконечными сериями A_n, B_n, C_n, D_n и пятью особыми группами E_6, E_7, E_8, F_4, G_2. Компактные группы B_n и D_n могут быть геометрически интерпретированы как группы движений классических неэвклидовых пространств Римана S_n ($S_{2n} = B_n \mid D_n$, $S_{2n-1} = D_n \mid B_{n-1}$) (пространства Лобачевского дают геометрическую интерпретацию некомпактных групп тех же классов). Компактные группы A_n и C_n могут быть интерпретированы как группы движений аналогичных неэвклидовых пространств над комплексными числами и кватернионами K_n и Q_n ($K_n = A_n \mid A_{n-1} \times D_1$, $Q_n = C_{n+1} \mid C_n \times C_1$). Компактные группы G_2 и F_4 могут быть интерпретированы как группы движений аналогичных прямой и плоскости над октавами (числами Кели) O_1 и O_2 ($O_1 = G_2 \mid A_1 \times A_1$, $O_2 = F_4 \mid B_4$).

В докладе определяются аналогичные неэвклидовы плоскости над комплексными, кватернионными и октавными октавами KO_2, QO_2, OO_2 (эти алгебры представляют собой алгебры октав, в которых роль коэффициентов играют, соответственно, комплексные числа, кватернионы и октавы, единицы которых перестановочны с единицами основной алгебры октав). Показывается, что компактные группы E_6, E_7, E_8 могут быть интерпретированы как группы движений этих плоскостей ($KO_2 = E_6 \mid D_5 \times D_1$, $QO_2 = E_7 \mid D_6 \times A_1$, $OO_2 = E_8 \mid D_8$). Этим завершается решение задачи геометрической интерпретации всех компактных простых групп Ли, причем, как оказывается, геометрические интерпретации всех простых групп Ли без исключения построены по единому плану.

В заключение работы находятся образы симметрии плоскостей O_2, KO_2, QO_2 и OO_2, а также строятся геометрические интерпретации некоторых некомпактных групп тех же классов.

В. Н. Рыбаков (*Москва*). **Линейчатые поверхности Г конгруенций и пучки Г на поверхностях.** I. Линейчатые поверхности Г конгруенций. Линейчатую поверхность, образованную главными нормалями некоторой кривой, назовем линейчатой поверхностью Г, а эту кривую — кривой Г.

Исследование вопроса о разложении конгруенции на линейчатые поверхности Г приводит к следующей теореме.

Любую конгруенцию можно разложить на линейчатые поверхности Г с произволом двух функций одного аргумента. Класс конгруенций, определяемый с произволом одной функции двух аргументов, можно разложить на линейчатые поверхности, образованные главными нормалями семейства кривых Бертрана. В этом случае для обоих семейств кривых Бертрана огибающие нормальных плоскостей являются параллельными поверхностями одной и той же нормальной конгруенции. Для конгруенции, у которой первая ось трехгранника Гишара делит пополам угол между касательными к кривым Г и касательными к ребру возврата нормальных плоскостей, имеет место соотношение

$$A = 2t \operatorname{ctg} 2\alpha,$$

где A — анормалия конгруенции, t — расстояние кривой Г до центра луча, α — угол касательной к кривой Г с первой осью трехгранника Гишара. Конгруенции, у которых касательные к кривым Г вдоль одного луча можно соединить в геликоиды, имеют постоянную анормалию. Обратно, если анормалия конгруенции постоянна, то из касательных к кривым Г можно образовать геликоиды.

II. Пучок Г на поверхности. Совокупность кривых, принадлежащих данной поверхности, главные нормали которых в рассматриваемой точке поверхности лежат в одной плоскости, назовем пучком Г.

При заданной плоскости однопараметрическое семейство кривых пучка Г на данной поверхности определяется с произволом в одну функцию одного аргумента.

Пучком Γ_c назовем пучок Г, который можно разбить на ∞' однопараметрических семейств кривых, образующих между собой в каждой точке постоянный угол. Такой пучок существует на каждой поверхности с произволом в одну функцию одного аргумента и характеризуется равенством

$$A = \frac{1}{\sqrt{-K}},$$

где A — анормалия конгруенции, образованной касательными к любому из однопараметрических семейств, K — полная кривизна поверхности. Из этого равенства очевидно, что A при изгибании поверхности Γ_c не меняется.

На линейчатой поверхности кривые, имеющие постоянный угол с образующими, образуют пучок Γ_c. Исследование вопроса о соответствии пучков Г на паре произвольных поверхностей дает теорему:

При конформном соответствии двух поверхностей на них существует восемь пучков Г, все кривые которых соответствуют друг другу.

В. В. Рыжков (*Москва*). **Тангенциальное изгибание поверхностей и связанные с ним задачи.** 1. Следующие три задачи тесно связаны между собой:

А. Изгибание (наложение) k-го порядка в смысле Картана поверхностей V_n аффинного или эвклидова E_N, рассматриваемых как (предполагаемые невырожденными, т. е. n-параметрическими) многообразия своих касательных E_n. Наложение осуществляется семейством движений или аффинных преобразований $\bar{\xi} \to A\bar{\xi} + \bar{b}$, совмещающих соответствующие касательные плоскости поверхностей вместе с их окрестностями k-го порядка, и называется собственно тангенциальным, если те же преобразования или, в аффинном случае, преобразования с матрицей вида λA, не осуществляют точечного наложения того же или высшего порядка.

В. Преобразование параллелизма Петерсона, при котором касательные плоскости V_n и V'_n в соответствующих точках параллельны. Задача В является частным случаем задачи А.

С. Отыскание полных сопряженных систем, т. е. таких V_n, в каждой точке которых $\bar{x}$ касательное E_n содержит E_p, E_q такие, что $p + q = n$, $d_{E_p} d_{E_q} \bar{x} \subset E_n$.

2. В аффинном случае собственно тангенциально налагающиеся в смысле А поверхности всегда представляют собой полные сопряженные системы С. Эти сопряженные системы характеризуются уравнениями вида

$$p_i^\alpha \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^j \partial u^\alpha} - p_j^\alpha \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u^i \partial u^\alpha} = p_{ij}^\alpha \frac{\partial \bar{x}}{\partial u^\alpha}, \quad i, j, \alpha = 1, 2, \ldots n.$$

В подходящей (может быть, неголономной) системе отнесения матрица (p_i^α) принимает каноническую форму и ее структура определяет тип и свойства сопряженной системы.

3. Уравнения п. 2 при некоторых дополнительных ограничениях на характер сопряженной системы оказываются не только достаточными, но и необходимыми для ее существования. Их изучение позволяет получить ряд типов сопряженных систем и, в известной мере, дать их классификацию, а также рассмотреть для них задачи A и B.

4. Поверхности, допускающие тангенциальное аффинное наложение порядка k, всегда допускают, в том же соответствии между ними, и точечное наложение того же порядка; при любом k существуют, однако, поверхности, для которых оба указанных наложения не могут быть осуществлены одновременно, т. е. одним и тем же семейством преобразований.

5. Задача метрического тангенциального наложения (ограничиваясь собственно тангенциальными наложениями) имеет решения только при $k = 1$. Она распадается на две задачи:

5a. Сходственные направления касательных плоскостей не налагаются. Задача является обобщением задачи B. В E_3 обе эти задачи совпадают.

5b. Сходственные направления касательных плоскостей налагаются. Поверхность может не быть сопряженной системой (в аффинном смысле наложение не является собственно тангенциальным). Соответствие между поверхностями конформное. Условия наложимости выражаются через формы $(d\bar{x})^2$, $(d^2\bar{x})^2$ и им соответствующие; при этом налагающиеся поверхности конформны римановым пространствам, допускающим поля параллельных векторов.

Е. П. Сенькин (*Ленинград*). **О неизгибаемости выпуклых поверхностей.** Изометричные замкнутые выпуклые поверхности, как показал А. В. Погорелов, равны с точностью до движения и отражения. Иначе обстоит дело с незамкнутыми выпуклыми поверхностями. Они, как правило, не только не определяются однозначно своей метрикой, но допускают даже непрерывные изгибания, подобно, например, полусфере. Однако, если наложить некоторые дополнительные условия на границу поверхности, то и для незамкнутых выпуклых поверхностей может быть получен ряд теорем о неизгибаемости.

Пусть дана конечная выпуклая поверхность F с произвольной границей L.

Возьмем точку O, не принадлежащую F, вне или на границе выпуклой оболочки F. Будем говорить, что поверхность F видна изнутри из точки O, если она целиком лежит на границе выпуклой оболочки F и точки O.

Класс поверхностей, видных изнутри, включает в себя замкнутые поверхности и поверхности, проектирующиеся однозначно на некоторую плоскость. Справедливы следующие теоремы:

1. Изометрические многогранники, видные соответственно изнутри из точек O_1, O_2, равны, если равны расстояния от точек O_1 и O_2 до соответствующих по изометрии точек границ.

2. Регулярные поверхности, видные изнутри соответственно из точек O_1 и O_2, равны, если равны расстояния от O_1 и O_2 до соответствующих точек границ.

Теорема 1 содержит известную теорему Коши об однозначной определенности замкнутых выпуклых многогранников, а теорема 2 — теорему об однозначной определенности регулярных овалоидов. Доказательство проводится существенно новым методом, основывающимся на наглядно геометрических соображениях.

Подробное изложение сообщаемых результатов можно найти в статьях [1], [2], [3].

Лит.: 1. Сенькин Е. П., Усп. матем. наук (в печати). 2. Александров А. Д. и Сенькин Е. П., Вестн. ЛГУ, № 8, (1955). 3. Александров А. Д. и Сенькин Е. П., Вестн. ЛГУ (в печати).

Н. С. Синюков (*Одесса*). **О геодезическом отображении римановых пространств.** Изучение геодезического отображения римановых пространств идет в двух направлениях. Одно направление объединяет работы, посвященные геометрическим свойствам пространств, допускающих геодезическое отображение. В основном здесь рассматривается геодезическое отображение римановых пространств на некоторые специальные классы пространств. Второе направление ставит своей задачей получение исчерпывающей классификации римановых пространств, допускающих геодезическое отображение.

Работа автора тоже велась в этих направлениях.

Пространство аффинной связности A_n назовем полусимметрическим, если его тензор кривизны удовлетворяет условиям

$$R^h_{ijk,lm} - R^h_{ijk,ml} = 0.$$

Они имеют простое геометрическое истолкование. Из этого и из самого определения следует, что полусимметрические пространства являются широким обобщением пространств симметрических.

Оказывается, что если риманово пространство $\overline{V}_n$ допускает нетривиальное геодезическое отображение на эквиаффинное полусимметрическое пространство, то оно или пространство Эйнштейна, или эквидистантное пространство (эквидистантные пространства характеризуются существованием вектора φ_i для которого $\rho g_{ij} - \varphi_{i/j}=0$).

Можно указать и более сильные необходимые условия на $\overline{V}_n$, но и этого уже достаточно, чтобы получить следующее усиление классической теоремы Бельтрами: если риманово пространство допускает нетривиальное геодезическое отображение на эквиаффинное полусимметрическое рекуррентное пространство, то (при $n > 2$) оно есть пространство постоянной кривизны. Класс эквидистантных пространств также представляет определенный интерес (с другой точки зрения к нему пришел Я. Л. Шапиро). Этому классу принадлежат все известные до сих пор n — 2 раза проективные пространства. Все (при $\rho \neq 0$) эквидистантные пространства первого класса даются формулой

$$ds^2 = (dx^1)^2 + f(x^1) d\tilde{s}^2,$$

где $d\tilde{s}^2$ — или любое n — 1-мерное пространство постоянной кривизны в области переменных $x^2, \ldots, x^n$, или (при специальном $f(x^1)$ — любая гиперповерхность в пространстве постоянной положительной кривизны. Далее, все эквидистантные пространства (при $\rho \neq 0$) допускают нетривиальное геодезическое отображение. Исследование его привело к новому подходу в классификации римановых пространств, допускающих геодезическое отображение. Это дало возможность выделить геометрическим условием широкий класс *нормальных* геодезических отображений, к которому принадлежат, в частности, геодезические отображения V_n (с метрическим тензором g_{ij}) на $\overline{V}_n$ (с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}$) при простых элементарных делителях матрицы $\| \lambda g_{ij} - \bar{g}_{ij} \|$. Задача классификации всех римановых пространств, допускающих нормальное геодезическое отображение, сводится к отысканию в пространстве меньшего числа измерений ковариантно постоянных тензоров и поэтому может считаться в определенном смысле решенной.

З. А. Скопец (*Ярославль*). **Применение неэвклидовых геометрий к обобщению принципа двух следов в начертательной геометрии эвклидова пространства.** В основе принципа двух следов в начертательной геометрии трехмерного эвклидова пространства, как известно, лежит отображение прямых пространств на пары упорядоченных точек плоскости изображения π. Каждая пара точек получается в результате проектирования следов прямой относительно двух фиксированных плоскостей α и β из некоторого центра S на плоскость изображения.

Обобщение этого принципа заключается в том, что пара плоскостей α и β заменяется любой вещественной поверхностью второго порядка F_2. Для практических приложений метода целесообразно за плоскость изображения выбрать плоскость симметрии поверхности, а за центр проектирования — полюс этой плоскости относительно F_2.

Поверхность F_2 позволяет установить неэвклидову метрику в пространстве, а вместе с этим в плоскости изображения устанавливается также определенная неэвклидова метрика, зависящая от типа кривой s_2, по которой пересекаются F_2 и π.

Рассматриваются следующие случаи отображения:

1) пространства Лобачевского на плоскость Лобачевского,

2) псевдогиперболического пространства на идеальную область плоскости Лобачевского,

3) пространства Лобачевского на эллиптическую плоскость,

4) двойственно-псевдоэвклидова пространства на двойственно-эвклидову плоскость,

5) двойственно-псевдоэвклидова пространства на двойственно-псевдоэвклидову плоскость.

Плоскости в соответствующих неэвклидовых пространствах отображаются на ориентированные окружности — циклы — в неэвклидовых плоскостях, причем отображение сохраняет углы. Движения в неэвклидовых пространствах индуцируют конформные преобразования (Мебиуса) в неэвклидовых плоскостях.

Применение полученных результатов к начертательной геометрии эвклидова пространства позволило решить следующие задачи в монопроекции: построены изображения линий пересечения

1) любых двух поверхностей второго порядка,

2) поверхности тора и плоскости,

3) линейчатых поверхностей третьего и четвертого порядка с поверхностью второго порядка,

4) некоторых линейчатых поверхностей между собой.

Л. А. Скорняков (*Москва*). **Гомоморфизмы проективных плоскостей и *T*-гомоморфизмы тернаров.** Однозначное отображение φ точек и прямых проективной плоскости π, соответственно, на точки и прямые проективной плоскости π' называется гомоморфизмом, если $a \in l \in \pi$ (a — точка, l — прямая) влечет $a^{\varphi} \in l^{\varphi}$.

Однозначное отображение θ тернара $\mathfrak{M}$ на тернар $\mathfrak{M}'$, дополненный символом ∞ (операция на ∞ не распространяется), называется T-гомоморфизмом, если выполнены следующие условия:

ТГ 1. если a^{θ}, m^{θ}, $b^{\theta} \neq \infty$, то $(a \cdot m_0 b)^{\theta} = a^{\theta} \cdot m_0^{\theta} b^{\theta}$;

ТГ 2. если $a^{\theta} = \infty$, $b^{\theta} \neq \infty$, $(a \cdot m_0 b)^{\theta} \neq \infty$, то $m^{\theta} = 0$;

ТГ 3. если $m^{\theta} = \infty$, $b^{\theta} \neq \infty$, $(a \cdot m_0 b)^{\theta} \neq \infty$, то $a^{\theta} = 0$;

ТГ 4. если $b^{\theta} = \infty$, $(a \cdot m_0 b)^{\theta} \neq \infty$, то или $a^{\theta} = \infty$, или $m^{\theta} = \infty$;

ТГ 5. если $a^{\theta} = c^{\theta} = \infty$, $b^{\theta} \neq \infty$, $c = a \cdot m_0 b = a \cdot n_0 0$, то $m^{\theta} = n^{\theta}$;

ТГ 6. если $m^{\theta} = b^{\theta} = \infty$, $c^{\theta} \neq \infty$, $c = a \cdot m_0 b$, $0 = d \cdot m_0 b$, то $a^{\theta} = d^{\theta}$;

ТГ 7. если $a^{\theta} = m^{\theta} = b^{\theta} = c^{\theta} = \infty$, $c = a \cdot n_0 0 = a \cdot m_0 b$, $0 = d \cdot m_0 b$, то или $n^{\theta} = \infty$, или $d^{\theta} = \infty$.

Если над тернарами $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ построены плоскости π и π' соответственно, то плоскости π и π' гомоморфны. Если φ — гомоморфизм проективной плоскости π на проективную плоскость π', тернар $\mathfrak{M}$ плоскости π определяется точками A, B, O, E, а тернар $\mathfrak{M}'$ плоскости π' — точками A^{φ}, B^{φ}, O^{φ}, E^{φ}, то тернар $\mathfrak{M}$ T-гомоморфно отображается на тернар $\mathfrak{M}'$.

Однозначное отображение θ тела K (т. е. кольца с единицей, в котором уравнения $ax = b$, $xa = b$, $a \neq 0$, имеют единственное решение) на тело K', дополненное символом ∞ (операции на ∞ не распространяются), называется T-гомоморфизмом, если выполнены следующие условия:

Г1. если a^{θ}, $b^{\theta} \neq \infty$, то $(a + b)^{\theta} = a^{\theta} + b^{\theta}$, $(ab)^{\theta} = a^{\theta} \cdot b^{\theta}$;

Г2. если $a^{\theta} = \infty$, $c^{\theta} \neq \infty$, $c = ab$, то $b^{\theta} = 0$;

Г3. если $b^{\theta} = \infty$, $c^{\theta} \neq \infty$, $c = ab$, то $a^{\theta} = 0$.

Если тернар проективной плоскости является телом, т. е. имеет место $a \cdot m_0 b = am + b$, то свойства ТГ1—ТГ6 и свойства Г1—Г3 эквивалентны. Если тело ассоциативно, то ТГ7 также вытекает из Г1—Г3. В противном случае приходится дополнительно требовать:

Г4. если $a^{\theta} \neq \infty$, $b^{\theta} = {}^{\theta}c = \infty$, то

$$[((ab)\,c^{-1})\,\bar{b}^{-1}]^{\theta} = 0$$

($b\bar{a}^{-1}$ и $b\bar{a}^{-1}$ обозначают корни уравнений $ax = b$ и $xa = b$, соответственно).

Частным случаем T-гомоморфизма тел является специализация полей. Используя понятие T-гомоморфизма, оказывается возможным дать определение неассоциативного свободного тела. При этом всякое тело является T-гомоморфным образом некоторого свободного тела.

А. С. Смогоржевский (*Киев*). **Об одной метрической геометрии.** Введем в эвклидовой плоскости с присоединенной к ней бесконечно удаленной прямой декартову систему координат x, y и примем за фундаментальную кривую кубическую параболу

$$3y = x^3, \tag{1}$$

определяемую в тангенциальных координатах уравнением

$$9v = -4u^3. \tag{2}$$

Будем определять длину отрезка AB по формуле

$$AB = \frac{1}{6} \ln [(ABRR')\,(ABSS')\,(ABTT')],$$

где R, S, T — точки пересечения прямой AB с линией (1), а R', S', T' — точки, находимые из условий:

$$(RR'ST) = (SS'TR) = (TT'RS) = -1.$$

Мера угла рассматривается как величина, соответствующая по принципу двойственности длине отрезка.

При этих соглашениях для дифференциала дуги ds линии $f(x, y) = 0$ и дифференциала угла $d\theta$ вдоль линии $\varphi(u, v) = 0$ получим следующие формулы:

$$ds = \frac{\alpha^2 dx}{(x^3 - 3y)\,\beta}, \qquad d\theta = \frac{\gamma^2 du}{(4u^3 + 9v)\,\delta},$$

где

$$\alpha = 3xy - 2x^2y' + y'^2,$$

$$\beta = 3x^3y - 3x^4y' + 6x^2y'^2 + 9y^2 - 9xyy' - 2y'^3,$$

$$\gamma = 8u^2v' - 12uv + 3v'^2,$$

$$\delta = 8u^3v - 8u^4v' - 12u^2v'^2 - 18v^2 + 18uvv' - 3v'^3.$$

Интегрируя уравнения: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, получим

$$y = \frac{2}{3} Cx^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} C^2, \tag{3}$$

$$y = \frac{1}{6} x^3 + \frac{2}{3} Cx \pm \frac{1}{162} (9x^2 + 12C)^{\frac{3}{2}}, \tag{4}$$

$$v = \frac{4}{3} Cu^{\frac{3}{2}} + C^2, \tag{5}$$

$$v = -\frac{2}{9} u^3 - \frac{2}{3} Cu \pm \frac{2}{9} (u^2 + C)^{\frac{3}{2}}, \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная. Заметим, что при помощи подстановок

$$y = \frac{1}{3} x^3 + z, \qquad v = -\frac{4}{9} u^3 + w$$

уравнения $\beta=0$ и $\delta=0$ приводятся к виду:

$$2z'^3+9xzz'-9z^2=0, \quad w'^3-6uww'+6w^2=0.$$

Уравнения (3)—(6) определяют соответственно линии нулевой и бесконечно большой длины, нулевого и бесконечно большого угла. Фундаментальная кривая есть линия неопределенной длины и неопределенного угла.

Особые точки линий (4) принадлежат кубической параболе

$$3y=-x^3; \tag{7}$$

особые прямые линии (6) касаются кривой (7).

Коллинеации, преобразующие фундаментальную кривую в себя, называются движениями. Этим свойством обладают только следующие коллинеации:

$$x=kx, \quad y=k^3y \quad (k\neq 0, \quad k\neq\infty).$$

Кривые (1) и (7), имеющие общую бесконечно удаленную точку возврата, разделяют плоскость xy на три области: D_1, содержащую ось x, D_2 и D_3.

Пусть прямая l проходит через точку M, и расстояние от M до любой иной точки прямой l равно бесконечности. Через каждую точку M, не лежащую на линии (1), проходят три такие прямые: действительные и различные, если $M\subset D_1$; одна действительная и две мнимые, если $M\subset D_2+D_3$; три действительные, две из которых совпадают, если M лежит на кривой (7).

Пусть точка M лежит на прямой l и угол между l и любой иной прямой, проходящей через M, равен бесконечности. На каждой прямой l, не принадлежащей линии (2), лежат три такие точки: действительные и различные, если прямая l пересекает совокупность кривых (1), (7) в четырех действительных и двух мнимых точках, но не касается кривой (7); одна действительная и две мнимые, если l пересекает совокупность кривых (1), (7) в двух действительных и четырех мнимых точках; три действительные, две из которых совпадают, если l касается кривой (7).

А. С. Солодовников (*Москва*). **Проективные преобразования римановых пространств и пространства с общими геодезическими.** 1. П р о е к т и в н ы е п р е о б р а з о в а н и я р и м а н о в ы х п р о с т р а н с т в. Преобразование риманова пространства V_n в себя называется проективным, если оно переводит геодезические линии снова в геодезические. Нас будут интересовать те пространства V_n, которые допускают непрерывную группу G таких преобразований, и притом более широкую, чем группа движений. При этом предполагается $n\geqslant 3$, а метрика $ds^2=g_{ij}dx^i dx^j$ — положительно определенной.

Часть этих V_n была определена Фубини. Точнее, им были найдены те V_n, для которых размерность проективной группы превосходит размерность группы движений ровно на единицу.

Автором получена полная классификация пространств V_n по проективным группам (более широким, чем группы движений). Кроме пространств, определенных Фубини, сюда входят пространства, обозначаемые нами через $V(K)$, а также те пространства V_n, для которых проективная группа совпадает с аффинной.

Дадим в кратких чертах описание наиболее интересных из этих пространств — $V(K)$.

Пусть метрика постоянной кривизны K в некоторой системе координат представляется в виде

$$ds_0^2+\overset{1}{\sigma}d\tau_1^2+\ \dots\ +\overset{p}{\sigma}d\tau_p^2, \tag{1}$$

где ds_0^2, $d\tau_\alpha^2$ — самостоятельные метрики, зависящие каждая от своих переменных x^{i_0}, x^{i_α}, а $\overset{\alpha}{\sigma}>0$ — функции от x^{i_0}. Заменим в этом разложении $d\tau_1^2, \dots, d\tau_p^2$ на совершенно произвольные метрики $ds_1^2, \dots, ds_p^2$. Получим совокупность метрик

$$ds^2=ds_0^2+\overset{1}{\sigma}ds_1^2+\dots+\overset{p}{\sigma}ds_p^2. \tag{2}$$

Пространства V_n с этими метриками будем называть $V(K)$, а само представление (2) — K-разложением метрики ds^2. Определение законно, так как можно доказать следующее: если имеются K- и L-разложения одной и той же метрики ds^2, то $K = L$.

Среди всевозможных K-разложений метрики пространства $V(K)$ выберем то, для которого размерность ds_0^2 — наибольшая. Это K-разложение назовем *максимальным*. Максимальное разложение определяется однозначно, с точностью до тривиальных преобразований.

Пусть (2) есть максимальное разложение. Тогда справедливо следующее: произвольное проективное преобразование в пространстве (2) действует независимо в каждом из пространств ds_0^2, ds_1^2, ..., ds_p^2. Далее указываются канонические формы, к которым приводится произвольное K-разложение, и для каждой из этих форм (в предположении максимальности) — полная проективная группа.

2. Пространства с общими геодезическими. Речь идет о следующей геометрической проблеме. Пусть в многообразии $x_1, \ldots, x_n$ задана риманова метрика $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. Требуется определить все без исключения метрики $d\bar{s}^2 = \bar{g}_{ij}dx^i dx^j$ в том же многообразии, которые имеют общие геодезические с ds^2. Совокупность этих метрик назовем *геодезическим классом* метрики ds^2. Далее, назовем геодезический класс метрики ds^2 тривиальным, если в некоторой системе координат $ds^2 = ds_1^2 + \ldots + ds_p^2$, а все метрики $d\bar{s}^2$ исчерпываются комбинациями $c_1 ds_1^2 + \ldots + c_p ds_p^2$. Сформулированная выше задача сводится, по существу, к определению всех нетривиальных классов. Автором получено исчерпывающее решение этой задачи. При этом предполагается попрежнему $n \geqslant 3$ и $ds^2 > 0$.

Г. Н. Тевзадзе (*Тбилиси*). **О римановой метрике поверхностей проективного пространства.** Внутренняя геометрия поверхности, нормализованной осями и ребрами некоторой сети, как показал А. П. Норден, образует пару сопряженных метрик Вейля, а данная сеть совпадает с сетью изотропных линий метрики первого рода.

В докладе рассмотрены такие сети поверхности, прямые Грина которых индуцируют на ней пару римановых метрик. Дан инвариантный признак таких сетей, и полученные результаты применены к некоторым классам поверхностей проективного пространства. В частности, показано, что только проективно-изгибаемые поверхности, т. е. поверхности R, допускают риманову нормализацию Ли, а римановы нормализации поверхности второго порядка всегда индуцируют геометрию, метрика которой является лиувиллевой.

Н. Г. Туганов (*Томск*). **Конгруенция индикатрис поверхности в 3-мерном пространстве.** 1. Индикатрисой поверхности назовем линию второго порядка, присоединенную по определенному закону к каждой точке поверхности. Свойства конгруенции индикатрис находятся в тесной связи со свойствами самой поверхности.

2. В эвклидовом пространстве простейшим случаем индикатрисы поверхности является индикатриса Дюпена. Свойства конгруенции индикатрис Дюпена были изучены в работе [1].

Уравнение фокальных семейств конгруенции индикатрис Дюпена поверхности может быть представлено в следующем виде:

$$(F) + \frac{1}{4}\, d \ln K = 0,$$

где (F) — линейный элемент Фубини поверхности, K — полная кривизна поверхности. Отсюда, в частности, следует, что на поверхностях $K = \mathrm{const}$ фокальные семейства конгруенции индикатрис Дюпена соответствуют линиям Дарбу.

3. Конгруенция индикатрис поверхности в аффинно-дифференциальной геометрии была рассмотрена в работе [2].

4. Понятие индикатрисы поверхности можно перенести и в проективно-дифференциальную геометрию.

Построим в каждой точке поверхности асимптотические касательные. Они пересекутся с произвольной фиксированной плоскостью в точках M_1, M_2. В касательной плоскости поверхности построим кривую второго порядка, касающуюся асимптотических касательных в точках M_1, M_2, — эта линия C^2 и определит индикатрису поверхности в рассматриваемой точке. Произвол построения ее в точке зависит от одного параметра m.

Присоединим к каждой точке поверхности M тетраедр, два ребра которого совпадают с асимптотическими касательными поверхности; за остальные ребра возьмем прямые $[M_1, M_2]$, $[M, M_3]$, полярно сопряженные относительно соприкасающихся квадрик Дарбу поверхности, вершину M_3 выберем в фиксированной плоскости.

При подходящем нормировании вершин тетраедра дифференциальное уравнение фокальных семейств конгруенции индикатрис поверхности получим в виде

$$\frac{(\omega^1)^3+(\omega^2)^3}{\omega^1\omega^2}=d\ln m^*, \tag{1}$$

где m^* — функция точки поверхности, находящаяся в связи с параметром индикатрисы. Это уравнение можно записать также в виде

$$(F)=\frac{1}{2}\,d\ln m^*.$$

Линии на поверхности, определяемые этим уравнением, назовем линиями полюсов, вдоль них индикатрисы поверхности имеют огибающую.

5. Квадрики, присоединенные к линиям полюсов. Вдоль линий полюсов, и только вдоль них, две смежные индикатрисы в пределе лежат на квадрике. При этом получим не одну квадрику, а пучок их, уравнение которого будет

$$hz^2+xy-kyz-\frac{1}{k}zx-z-m=0,$$

где $k=\frac{\omega^2}{\omega^1}$ определяется из (1), индекс h — произвольная функция точки поверхности. Квадрики одного индекса, соответствующие трем линиям полюсов, исходящим из одной точки, образуют пучок с центрами на оси $[MM_3]$.

Абсциссы центров его определяются из уравнения

$$hz^2-z-m=0.$$

Конгруенция осей квадрик сопряжена относительно поверхности. При любых значениях параметра m и индекса h полюсы фиксированной плоскости $M_1M_2M_3$ относительно квадрик всех трех линий полюсов в точке лежат на конусе $xy=z^2$.

6. Дуальная форма конгруенции линий C^2. Возьмем общую конгруенцию линий C^2. Отобразим ее по принципу взаимных поляр относительно фиксированной квадрики. Линия C^2 конгруенции, рассматриваемая как точечное многообразие, изобразится однопараметрическим семейством плоскостей, проходящих через одну и ту же точку и огибающих конус второго порядка. Получим конгруенцию конусов второго порядка. Геометрическое место вершин этих конусов определит поверхность, соответствующую по асимптотическим линиям обертке плоскостей линий C^2 конгруенции. Фокальные семейства конгруенции конусов соответствуют фокальным семействам конгруенции линий C^2.

7. Изображение в P_5. Изобразим конгруенцию конусов в проективном пространстве P_5. Каждый луч конуса изобразится точкой гиперквадрики Q_4^2, конус второго порядка изобразится на Q_4^2 линией C^2. На Q_4^2 получим конгруенцию линий C^2, фокальные семейства которой соответствуют фокальным семействам конгруенции конусов.

Это изображение позволяет рассмотреть вопрос о преобразовании конгруенции конусов и, следовательно, исходной конгруенции линий C^2 в трехмерном пространстве.

Лит.: 1. Туганов Н. Г., ДАН СССР, 88, № 2, (1953). 2. Туганов Н. Г., ДАН СССР, 94, № 2, (1954).

М. А. Улановский (*Харьков*). **О группах голономии пространств аффинной связности.** Пусть A_n — пространство аффинной связности достаточно высокого класса.

Пусть $H_k(x)$ — минимальная алгебра Ли, содержащая все матрицы, образованные компонентами тензора кривизны и его ковариантными производными до k^{10}-го порядка включительно в точке x (в компоненте $\nabla_{r\ldots t}R_{jk,\,l}^{\cdot\cdot\,i}$; i, l — номера строк и колонн матрицы, $r\ldots t$, jk — «номер» матрицы).

Имеет место теорема:

Пусть в некоторой окрестности M точки x_0 $H_p(x) = H_{p+1}(x)$, причем размерность $H_p(x_0)$ не ниже, чем в каждой точке $x \in M$. Тогда $H_p(x_0)$ есть алгебра Ли центрально-аффинной группы голономии в точке x_0 относительно некоторой окрестности $N \subset M$.

Сформулированная теорема может быть применена для определения условий, при выполнении которых группа голономии пространства аффинной связности A_n подобна подгруппе ортогональной группы.

В частности, при $n = 2$ получаются известные условия для христоффелей поверхности.

Весьма простой вид имеют эти условия также в случае $n = 3$.

Теорема обобщается на составные многообразия с произвольной линейной связностью.

А. С. Феденко (*Минск*). **К теории симметрических пространств.** В 1926 г. Картан нашел все неприводимые симметрические римановы пространства знакоопределенной метрики; они связаны с простыми группами. Если снять требование знакоопределенности, то можно сравнительно легко найти все неприводимые симметрические римановы пространства с простыми группами движений [1], [2]. Существуют неприводимые симметрические римановы пространства с неполупростыми группами движений. Общего метода для отыскания всех таких пространств не имеется. Мы пока ставим себе задачу: получить возможно больше примеров указанных пространств. Для этого применяем метод предельного перехода, обобщающий переход от пространства постоянной кривизны к эвклидову пространству. Если эвклидово пространство можно рассматривать как результат равномерного растяжения по всем направлениям пространства постоянной кривизны, то предлагаемый нами обобщенный метод состоит в том, что мы растягиваем пространство по разным направлениям с разными скоростями.

Применяя этот метод к симметрическим пространствам с простыми группами движений, мы получаем целый ряд неприводимых симметрических римановых пространств с неполупростыми группами движений.

Так, из пространства нуль-пар вещественного проективного пространства P_{2n} можно получить неприводимое симметрическое пространство с линейным элементом:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{2n} dx^i du^i + \left[\sum_{j=1}^{n} (x^j dx^{n+j} - x^{n+j} dx^j)\right]^2.$$

Группа движений этого пространства имеет порядок $4n^2 + 4n$. Она является неполупростой группой, ее простая компонента содержится в стационарной подгруппе пространства и изоморфна группе вещественных симплектических матриц порядка $2n$. Из пространства $(2k-1)$-пар, т. е. непересекающихся пар плоскостей размерности $2k-1$ и $n-2k$ n-мерного вещественного проективного пространства получается неприводимое симметрическое пространство с линейным элементом вида

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N} dx^i du^i + a_{ijkl} x^i x^j dx^k dx^l,$$

где $i, j, k, l = 1, \ldots, N$, $N = 2k(n-2k+1)$, a_{ijkl} — некоторые константы.

Группа движений этого пространства неполупростая.

Неприводимые симметрические пространства с неполупростыми группами движений можно получить также из пространства прямых $(2n-1)$-мерного вещественного псевдоэллиптического пространства, из пространства m-пар кватернионного проективного пространства и из целого ряда других пространств.

Лит.: 1. Феденко А. С., Диссертация. МГУ, М. 1955. 2. Berger M., C. R. Acad. Sci., Paris, **240**, N 25, (1955), 2370—2372.

П. И. Швейкин (*Москва*). **Об аффинно-инвариантном оснащении поверхности.** Целью работы является построение инвариантного оснащения m-мерной поверхности n-мерного аффинного пространства. Разработанный Г. Ф. Лаптевым теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований дал возможность решить эту задачу в общем случае. Попутно получен ряд других геометрических объектов, связанных с поверхностью. Все построения осуществлены в явной форме посредством одних лишь рациональных операций.

Поверхность определяется системой дифференциальных уравнений Пфаффа. Ее продолжения приводят к бесконечной последовательности полей фундаментальных геометрических объектов $\underset{1}{(\Lambda)}$, $\underset{2}{(\Lambda)}$, $\underset{3}{(\Lambda)}$, . . ., каждый из которых включает все предыдущие в качестве своих подобъектов. Изучение поверхности сводится к построению охватов этими полями других инвариантно связанных с поверхностью полей. Во многих случаях это достигается исследованием так называемых систем охвата, представляющих собою системы линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Геометрический объект, охваченный фундаментальным объектом $\underset{s}{(\Lambda)}$ порядка s, будем называть простейшим объектом данного типа, если объектом $\underset{s-1}{(\Lambda)}$ нельзя охватить ни одного нетривиального объекта этого типа. Из объектов данного типа больший интерес, естественно, представляют простейшие. Исследования показывают, что простейшее инвариантное оснащение поверхностей общего вида, т. е. таких, из числа которых исключаются лишь некоторые специальные классы, должно охватываться объектом $\underset{p+2}{(\Lambda)}$, где p — наивысший порядок соприкасающейся плоскости, размерность которой меньше размерности пространства. Этот охват осуществлен в виде совокупности объектов $\underset{2}{(N)}$, $\underset{3}{(N)}$, $\underset{4}{(N)}$, . . ., каждый из которых включает все предыдущие в качестве своих подобъектов и определяет ту часть оснащения, по которой оно пересекается с соприкасающейся плоскостью соответствующего порядка. Для линии это простейшее оснащение оказалось единственно возможным, на поверхности же возможен пучок простейших оснащений. Путем p-кратного дифференцирования $\frac{(N)}{2}$ можно построить другое инвариантное оснащение, которое, однако, не является простейшим и потому менее интересно.

Инвариантное оснащение дает возможность получить бесконечную последовательность тензоров, обладающих важными свойствами. Например, тензор $\underset{p+1}{(\Pi)}$, охваченный объектом $\underset{p+1}{(\Lambda)}$, является простейшим тензором поверхности; тензором $\underset{p+2}{(\Pi)}$ на поверхности общего типа можно охватить тензор произвольно заданной валентности и в этом смысле его следует назвать основным; если все компоненты тензора $\underset{p+3}{(\Pi)}$ равны нулю, то поверхность обладает постоянной q-мерной осью (q — разность между размерностями пространства и соприкасающейся плоскости порядка p), а если при этом равны нулю и компоненты тензора $\underset{p+2}{(\Pi)}$, то поверхность оказывается алгебраической частного вида. На линии $\underset{p+1}{(\Pi)}$ и $\underset{p+2}{(\Pi)}$ отсутствуют, а тензор $\underset{p+3}{(\Pi)}$ является и простейшим и основным. Он распадается на p относительных инвариантов, причем вес первого из них равен 1, а вес каждого следующего на 1 больше веса предыдущего.

Перечисленные объекты открывают широкие возможности для дальнейших построений. Например, можно получить полную систему инвариантов любого порядка, полную систему простейших инвариантов, инвариантное дополнение соприкасающейся плоскости порядка s до соприкасающейся плоскости порядка $s + 1$, простейший канонический репер и другие объекты.

А. П. Широков (*Казань*). **Проективная интерпретация конформно эвклидовых симметрических пространств.** В проективном пространстве P_n рассматривается коллинеация $y^\alpha = f^\alpha_\sigma x^\sigma$, удовлетворяющая одному из условий $f^\alpha_\sigma f^\sigma_\beta = \omega\delta^\alpha_\beta$ ($\omega = 1$, -1, 0). Гиперповерхность P_n нормализуется так, что нормаль 1-го рода проходит через точки x^α и $y^\alpha = f^\alpha_\sigma x^\sigma$ (x — точка гиперповерхности), нормаль 2-го рода определяется пересечением гиперплоскостей ξ_α и $\eta_\alpha = f^\sigma_\alpha \xi_\sigma$ (ξ — касательная гиперплоскость).

Если гиперповерхность является гиперквадрикой $a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta = 0$, удовлетворяющей условию $a_{\alpha\sigma}f^\sigma_\beta = a_{\beta\sigma}f^\sigma_\alpha$, то нормали 1-го и 2-го рода полярно сопряжены относительно этой гиперквадрики, а ее внутренняя геометрия является геометрией конформно-эвклидова симметрического пространства (в некоторой нормировке асимптотический тензор такой гиперквадрики ковариантно постоянен и служит метрическим тензором комформно-эвклидова симметрического пространства).

Обратно, геометрия любого конформно-эвклидова симметрического пространства может быть реализована как внутренняя геометрия 1-го рода на гиперквадрике пространства P_n, удовлетворяющей указанному выше условию и нормализованной указанным выше способом.

В. И. Шуликовский (*Казань*). **Об одном обобщении уравнений Киллинга и импримитивных n-тканях.** В пространстве X_2 n-ткань задается псевдотензором $a_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, симметричным относительно всех индексов. Конечные уравнения n-ткани определяются дифференциальным уравнением

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_n} du^{i_1} du^{i_2} \ldots du^{i_n} = 0. \tag{1}$$

Назовем n — ткань импримитивной относительно одночленной группы Ли с оператором $X = \xi^i \partial_i$, если семейства ее линий являются системами импримитивности этой группы. Условие импримитивности имеет вид:

$$\xi^s a_{i_1 i_2 \ldots i_n} \mid s + n\xi^s \mid (i_1 a_{i_2 \ldots i_n})\, s = \sigma a_{i_1 i_2 \ldots i_n}, \tag{2}$$

где ковариантное дифференцирование ведется относительно произвольной аффинной связности A_2 без кручения.

Условие того, что сеть a_{ik} импримитивна, имеет вид

$$\xi_{i\,|\,s} = \sigma a_{is} + \rho\varepsilon_{is}, \tag{3}$$

где дифференцирование производится в римановой геометрии с основным тензором a_{is}, а ε_{is} — дискриминантный бивектор, применяемый для перебрасывания индексов. Из (3) следует, что линии тока поля ξ_i диагональны относительно сети. Обратно, каждое диагональное относительно сети поле определяет группу Ли, относительно которой сеть импримитивна.

На поверхности E_3 с $ds^2 = g_{ik}du^i du^k$ сеть a_{ik} назовем соленоидальной, если она допускает группу, вектор ξ_i которой градиентен. Соленоидальная сеть характеризуется тем, что ее метрически нормированный тензор определяет метрику поверхности вращения.

На этом пути получаются многие результаты Д. Ф. Егорова о потенциальных сетях, обобщения этих результатов и ряд новых свойств сетей.

При $n \geqslant 3$ не всякая n-ткань импримитивна. Импримитивной является каждая диагональная три-ткань.

Сеть Гессе импримитивной три-ткани a_{ijk} (ее тензор $b_{ik} = a^{\alpha\beta}_i a_{k\alpha\beta}$) и три-ткань $c_{ijk} = b^\alpha_i a_{\alpha ijk}$ импримитивны относительно той же группы.

Можно указать простой инвариантный признак импримитивности три-ткани.

Р. Н. Щербаков (*Улан-Удэ*). **Преобразования Егорова в теории конгруенций.** Будем рассматривать прямолинейную конгруенцию в трехмерном пространстве как однопараметрическое семейство линейчатых поверхностей. Будем подвергать каждую из этих поверхностей преобразованию движения или аффинному, или проективному преобразованию, коэффициенты которого являются непрерывными и дифференцируемыми функциями того же параметра. Если при этом будет сохраняться то или иное свойство конгруенции или семейства, то мы получим преобразование конгруенции, которое будем называть метрическим, аффинным или проективным *преобразованием Егорова*.

Возникает задача определения семейства линейчатых поверхностей, принадлежащих данной конгруенции, при помощи которых можно осуществить то или иное преобразование Егорова. Для решения задач такого типа применяется теория инвариантного относительно соответствующей группы преобразований репера линейчатой поверхности, принадлежащей данной конгруенции. Решения получаются в виде натуральных уравнений, содержащих инварианты соответствующего репера и их производные по инвариантному параметру.

В проективной геометрии рассматриваются преобразования Егорова трех родов. При преобразованиях первого рода проективные центры — вершины репера на луче — остаются точками, гармонически разделяющими фокусы. При преобразованиях второго рода сопряженная сеть линейчатых поверхностей, содержащая искомое семейство, остается сопряженной (сопряженность в смысле Санниа является не только метрическим, но и аффинным и проективным свойством сети). При преобразованиях 3-го рода одна из фокальных поверхностей конгруенции остается фокальной. В каждом случае получается ∞^{16} решений. В эквиаффинной геометрии также рассматриваются преобразования Егорова трех родов. При преобразованиях 1-го рода средняя поверхность остается средней, а преобразования 2-го и 3-го рода характеризуются так же, как в проективной геометрии. В каждом случае получается ∞^{12} решений. Для преобразований 1-го и 2-го рода наиболее интересными частными решениями являются цилиндроиды и поверхности с коническим спутником. В метрической геометрии для преобразований Егорова, сохраняющих ортогональность сферических изображений линейчатых поверхностей сети, включающей искомое семейство, решениями являются только цилиндроиды. Для нормальных конгруенций рассматриваются преобразования Егорова, оставляющие конгруенцию нормальной. Для параболических конгруенций рассматриваются преобразования Егорова, при которых фокальная поверхность остается фокальной. Для конгруенций Гишара-Пето рассматриваются преобразования Егорова, сохраняющие нормальность средней поверхности, а также преобразования Егорова, сохраняющие следующее свойство сети линейчатых поверхностей: их сферические изображения и линии пересечения со средней поверхностью являются ортогональными сетями линий.

Н. Н. Яненко (*Москва*). **Проблемы вложения римановых метрик в эвклидовы пространства.** Вложение m-мерной римановой метрики $U_m \subset ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ в эвклидово пространство E_n размерности n является одной из центральных проблем многомерной дифференциальной геометрии.

Задача в наиболее общем виде может быть поставлена так: при заданной метрике U_m и размерности n вмещающего эвклидова пространства определить, возможно ли вложение $U_m \subset E_n$ и с каким произволом.

Здесь мы ограничиваемся рассмотрением трижды дифференцируемых или вообще аналитических метрик и соответственно гладких реализаций. Для однократно дифференцируемых метрик характер задачи резко меняется. Основная задача приводит к следующим двум.

А. При заданной метрике U_m определить наименьшее q, для которого еще возможно вложение $U_m \subset E_{m+q}$ (проблема класса). Число q называется классом метрики.

Б. Если $V_m \subset E_{m+q}$ есть реализация метрики U_m, то будет ли эта реализация однозначной. Если нет, то каков будет произвол реализации (проблема изгибания).

Проблемам А, Б посвящено много работ. В первую очередь характеризовались метрики класса 1 как с однозначным, так и с неоднозначным вложением. К этой задаче относятся работы Бица (1876), Бианки (1905), Сбрана (1909), Картана (1916), Вейзе, Томаса (1936), Розенсон (1940—1943), Лопшица. Задачу эту в основном можно считать исчерпанной.

Исследование общей задачи вложения U_m в E_{m+q} начинается с работ Аллендорфера. Затем последовали работы Черна, Мацумото, Вербицкого, автора и др.

В работах автора даются критерии класса q для некоторого достаточно общего класса метрик.

Далее рассматриваются геометрические свойства изгибаемых поверхностей $V_m \subset E_{m+g}$ и устанавливаются необходимые и достаточные условия изгибания для достаточно широкого класса изгибаемых поверхностей. Кроме того, рассматривается задача бесконечно малого изгибания, устанавливается проективная инвариантность класса нежестких поверхностей.

Указываются некоторые представляющие интерес нерешенные задачи.

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ОСНОВАНИЙ МАТЕМАТИКИ

С. И. Адян (*Москва*). **Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем теории групп.** Разработка точного понятия алгоритма, данная в последнее время рядом авторов, позволила доказать неразрешимость некоторых алгоритмических проблем.

Алгоритмическая проблема всегда имеет массовый характер. Она соответствует целому классу отдельных вопросов, требующих ответа «да» или «нет», и состоит в разыскании алгоритма, позволяющего решить любой из этих вопросов. Неразрешимость алгоритмической проблемы означает только невозможность решить все эти вопросы с помощью единого общего метода. Но это ни в коем случае не означает неразрешимости какой-нибудь из объединяемых ею единичных проблем.

Теоремы о невозможности алгоритмов имеют существенное значение для развития математики, так как они предостерегают математиков от безнадежных поисков несуществующих алгоритмов.

Среди работ этого направления наиболее выдающимися являются работы П. С. Новикова, доказавшего неразрешимость известной проблемы тождества слов для групп, заданных конечным числом образующих и определяющих соотношений. Им же доказана неразрешимость проблемы сопряженности и проблемы изоморфизма для групп с определяющими соотношениями.

В настоящей работе на основе результатов П. С. Новикова доказывается неразрешимость некоторых других алгоритмических проблем, которые стояли в теории групп или могут быть поставлены.

Теорема 1. Пусть F_0 — произвольная группа, заданная конечным числом образующих элементов и определяющих соотношений. Невозможен алгоритм, который для каждой группы F с конечным числом образующих элементов и определяющих соотношений определял бы, изоморфна она группе F_0 или нет.

Некоторое свойство α группы F_0 назовем инвариантным, если всякая группа F_1, изоморфная группе F_0, также обладает этим свойством. Свойство β группы F_0 назовем наследственным свойством, если всякая группа F_1, изоморфная некоторой подгруппе F_0' группы F_0, также обладает им. Очевидно, всякое наследственное свойство будет инвариантно. Выполнимость или невыполнимость в данной группе некоторого инвариантного свойства не зависит от способа задания этой группы.

Пусть α — некоторое инвариантное свойство. Проблема распознавания выполнимости свойства α ставится следующим образом: требуется найти алгоритм, определяющий для каждой группы F с конечным числом образующих и определяющих соотношений, выполнено в ней свойство α или нет.

Наследственное свойство β_0 назовем нетривиальным наследственным свойством, если этим свойством не обладает свободная группа с двумя образующими.

Теорема 2. Пусть α_0 — произвольное инвариантное свойство, β_0 — некоторое нетривиальное наследственное свойство. Если имеется группа F_0 с конечным числом образующих и определяющих соотношений, в которой выполнено свойство $(\alpha_0 \& \beta_0)$, то проблема распознавания свойства $(\alpha_0 \& \beta_0)$ неразрешима.

Инвариантное свойство α_0 назовем специальным инвариантным свойством, если оно не выполнено ни в одной группе с неразрешимой проблемой тождества.

Теорема 3. Пусть α_0 — некоторое специальное инвариантное свойство Если имеется группа F_0 с конечным числом образующих и определяющих соотношений, в которой выполнено свойство α_0, то проблема распознавания выполнимости свойства α_0 неразрешима.

Теорема 4. Проблема распознавания выполнимости неразрешима для следующих свойств групп:

1) иметь свободную подгруппу ранга k,

2) быть простой группой.

Перечень этих свойств может быть продлен.

И. Д. Заславский (*Ленинград*), **Г. С. Цейтин** (*Ленинград*). **О соотношениях между основными свойствами конструктивных функций.** В докладе рассматриваются покрытия вещественной оси конструктивными последовательностями промежутков; с помощью таких покрытий выводятся некоторые свойства конструктивных функций.

Теорема 1. Для всякого натурального m существует конструктивная последовательность сегментов с рациональными концами $[\alpha_n, \beta_n]$, обладающая следующими свойствами:

1) для любого конструктивного вещественного числа x существует такое натуральное число n_0, что $x \in [\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}]$;

2) для любого l $\sum\limits_{n=1}^{l} (\beta_n - \alpha_n) < 2^{-m}$.

Замечание. За счет несущественного ослабления условий теоремы можно добиться, чтобы никакие сегменты $[\alpha_{n_1}, \beta_{n_1}]$, $[\alpha_{n_2}, \beta_{n_2}]$ не имели общих внутренних точек.

Теорема 2. Если конструктивная последовательность $[\alpha_n, \beta_n]$ такова, что последовательность сумм $\sum\limits_{n=1}^{l} (\beta_n - \alpha_n)$ конструктивно сходится к некоторому пределу, то существует вещественное число x, не входящее ни в один из промежутков $[\alpha_n, \beta_n]$.

Такие же утверждения справедливы и для конструктивных покрытий любого сегмента $[a, b]$; при этом в теореме 2 вместо слов «сходятся к некоторому пределу» следует поставить «сходятся к некоторому пределу, меньшему $b—a$».

Конструктивную функцию мы будем понимать в смысле определения А. А. Маркова [1]. Функцию $f(x)$ мы будем называть *интегрируемой по Риману*, если для всякого рационального $\varepsilon > 0$ существует (конструктивно) такое рациональное $\delta > 0$, что при всевозможных дроблениях сегмента $[a, b]$:

$$a = x_0' \leq \xi_0' \leq x_1' \leq \xi_1' \leq x_2' \leq \ldots \leq \xi_{n_1-1}' \leq x_{n_1}' = b,$$

$$a = x_0'' \leq \xi_0'' \leq x_1'' \leq \ldots \leq \xi_{n_2-1}'' \leq x_{n_2}'' = b,$$

таких, что всегда $x_{k+1}' - x_k' < \delta$, $x_{k+1}'' - x_k'' < \delta$, оказывается:

$$\left| \sum_{k=0}^{n_1-1} f(\xi_k')(x_{k+1}' - x_k') - \sum_{k=0}^{n_2-1} f(\xi_k'')(x_{k+1}'' - x_k'') \right| < \varepsilon.$$

Очевидно, что для всякой интегрируемой функции существует интеграл:

$$I = \lim_{\max(x_{k+1}-x_k)\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Конструктивную функцию $f(x)$ мы будем называть *дифференцируемой*, если для всякого рационального $\varepsilon > 0$ существует (конструктивно) рациональное $\delta > 0$, такое, что при $|h_1| < \delta$, $|h_2| < \delta$ оказывается:

$$\left| \frac{f(x+h_1)-f(x)}{h_1} - \frac{f(x+h_2)-f(x)}{h_2} \right| < \varepsilon.$$

Очевидно, что для всякой дифференцируемой функции существует производная

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Функцию $\Phi(x)$ мы будем называть *первообразной* для $f(x)$, если всегда $\Phi'(x) = f(x)$.

Обобщенным интегралом на $[a, b]$ будем называть всякий предикат P над парами (f, I), состоящими из конструктивных функций f и конструктивных вещественных чисел I, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Если всегда $f(x) = g(x)$ и $I_1 = I_2$, то $P(f, I_1)$ равносильно $P(g, I_2)$.
2. (Однозначность). Если $P(f, I_1)$ и $P(f, I_2)$, то $I_1 = I_2$.
3. (Аддитивность). Если $P(f, I_1)$ и $P(g, I_2)$, то $P(f+g, I_1+I_2)$.
4. (Монотонность). Если всюду $f(x) \geqslant 0$ и $P(f, I)$, то $I \geqslant 0$.
5. (Перманентность). Если $f(x)$ — полигональная функция, то $P\left(f, \int_a^b f(x)\,dx\right)$.

При помощи последовательностей сегментов, построенных в теореме 1, могут быть заново доказаны теоремы 1—4 из доклада И. Д. Заславского «Некоторые особенности конструктивных функций вещественного переменного по сравнению с классическими» и, кроме того, доказываются следующие теоремы:

Теорема 3. Существует непрерывная конструктивная функция, не интегрируемая по Риману на $[0,1]$.

Теорема 4. Существует непрерывная конструктивная функция, не имеющая первообразной на $[0,1]$.

Теорема 5. Существует непрерывная конструктивная функция $f(x)$, такая, что $P(f, I)$ невозможно ни для какого обобщенного интеграла P на $[0,1]$.

Лит.: 1. Марков А. А., Усп. матем. наук 9, № 3, (1954), 226—230.

И. Д. Заславский (*Ленинград*). **Некоторые особенности конструктивных функций вещественного переменного по сравнению с классическими.** В докладе рассматривается ряд свойств конструктивных вещественных чисел и конструктивных функций. Под конструктивным вещественным числом понимается нормальный алгорифм [1], задающий последовательность рациональных чисел, конструктивно сходящуюся в себе. Это определение эквивалентно определению вычислимого вещественного числа по Шпекеру [2]. Под конструктивной функцией вещественного переменного понимается нормальный алгорифм, перерабатывающий записи вещественных чисел в записи вещественных чисел, причем записи равных вещественных чисел переходят в записи равных вещественных чисел. Это понятие конструктивной функции введено А. А. Марковым [3]. В дальнейшем будут рассматриваться только функции в смысле А. А. Маркова. Доказывается лемма: существует такая конструктивная последовательность конечных наборов сегментов Φ_m, что 1) $\Phi_1 \subset [0,1]$; 2) $\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \Phi_3 \supset \ldots$; 3) не существует конструктивного вещественного числа, входящего во все Φ_m.

Исходя из этой леммы, доказываем дальнейшие свойства конструктивных функций.

Конструктивная функция $f(x)$ называется *непрерывной* на $[a, b]$, если для любого $x_0 \in [a, b]$ и любого рационального $\varepsilon > 0$ существует (конструктивно!) такое рациональное $\delta > 0$, что $|x - x_0| < \delta$ и $x \in (a, в)$ влечет $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется *равномерно* непрерывной на $[a, b]$ если для любого рационального $\varepsilon > 0$ существует (конструктивно) такое рациональное $\delta > 0$, что при $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Оказывается, что, в отличие от классического анализа, не всякая непрерывная функция равномерно непрерывна.

Доказываются теоремы: 1) существует функция, непрерывная, но не ограниченная на $[0,1]$; 2) существует функция, непрерывная и ограниченная на $[0,1]$, но не имеющая на нем точной (наименьшей) верхней границы; 3) существует функция, непрерывная и ограниченная, но не равномерно непрерывная на $[0,1]$, причем для $\varepsilon=1$ не существует соответствующего $\delta>0$; 4) существует функция, равномерно непрерывная на отрезке $[0,1]$, принимающая на нем все значения между 0 и 1, но не принимающая значения, равного своей точной верхней границе 1.

Теоремы 1—4 можно распространить на дифференцируемые и бесконечно дифференцируемые функции.

Функция $f(x)$ называется функцией *сильно ограниченной вариации* на $[a, b]$, если для всевозможных сумм

$$\sum_{k=0}^{n-1} | f(x_{k+1}) - f(x_k) |,$$

где $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$, существует точная (наименьшая) верхняя граница. Доказываются теоремы: 5) всякая функция, не убывающая на $[a, b]$, равномерно непрерывна; 6) всякая функция сильно ограниченной вариации представима в виде разности двух неубывающих функций, но 7) не всякая разность двух неубывающих функций имеет сильно ограниченную вариацию.

Функция $f(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на $[a, b]$, если для всякого рационального $\varepsilon>0$ существует (конструктивно) такая полигональная функция $\varphi(x)$, что при всех дроблениях $a = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$ выполнено неравенство:

$$\sum_{k=0}^{n-1} | f(x_{k+1}) - \varphi(x_{k+1}) - f(x_k) + \varphi(x_k) | < \varepsilon.$$

Условие Липшица определяется обычным образом. Доказываются теоремы: 8) всякая абсолютно непрерывная функция имеет сильно ограниченную вариацию; 9) существует функция, удовлетворяющая условию Липшица, но не имеющая сильно ограниченной вариации. Доказывается, что теорема 4) справедлива для абсолютно непрерывных функций, удовлетворяющих условию Липшица.

Лит.: 1. Марков А. А., Труды Матем. ин-та АН СССР, **42**, 1954. 2. Specker E., Journ. of Symb. Log., **14**, (1949), 145—158. 3. Марков А. А., Усп. матем. наук, **9**, № 3, (1954), 226—230.

И. Д. Заславский *(Ленинград)*. **О конструктивных дедекиндовых сечениях.** Обычно определение конструктивного вещественного числа дается по аналогии с классическим определением Кантора. Оказывается также возможным ввести определение конструктивного вещественного числа аналогично классическим определениям дедекиндовых сечений и последовательностей стягивающихся интервалов.

Конструктивным дедекиндовым сечением называется нормальный алгорифм [1] α над алфавитом рациональных чисел, удовлетворяющий следующим условиям:

1. Если алгорифм α применим к рациональному числу r, то либо $\alpha(r)=0$, либо $\alpha(r)=1$.

2. Если $\alpha(r_1)=1$ и $r_2<r_1$, то и $\alpha(r_2)=1$; если $\alpha(r_1)=0$ и $r_2>r_1$, то и $\alpha(r_1)=0$.

3. Не может не существовать двух таких рациональных чисел R_1 и R_2, что $\alpha(R_1)=1$, $\alpha(R_2)=0$.

4. Если r_1 и r_2 — два любых неравных рациональных числа, то алгорифм α не может быть неприменим и к r_1 и к r_2.

5. Каково бы ни было рациональное число r, выполняется следующее: если алгорифм α применим к r, то не может не существовать двух таких рациональных чисел r_1 и r_2, что $r_1<r<r_2$, и $\alpha(r_1)=\alpha(r)=\alpha(r_1)$.

Конструктивной последовательностью стягивающихся интервалов называется нормальный алгорифм, перерабатывающий любое натуральное число n в такую пару рациональных чисел (α_n, β_n), что

1) при всех n справедливы неравенства $\alpha_n < \alpha_{n+1} < \beta_{n+1} < \beta_n$;

2) по всякому рациональному числу $\varepsilon > 0$ не может не найтись такого натурального числа n, что $\beta_n - \alpha_n < \varepsilon$.

Даются определения отношений порядка и равенства и арифметических действий над вещественными числами в терминах дедекиндовых сечений и последовательностями стягивающихся интервалов; устанавливается конструктивный изоморфизм между дедекиндовыми сечениями, последовательности стягивающихся интервалов и вычислимыми числами по Шпекеру [2]. Доказываются также теоремы о полноте вещественной оси.

Лит.: 1. Марков А. А., Труды Матем. ин-та АН СССР, 42, (1954). 2. Specker E., Journ. of Symb. Log., 14, (1949), 145—158.

Ю. Т. Медведев (*Москва*). **О понятии массовой проблемы и его применениях в теории рекурсивных функций и математической логике.** Термин «массовая проблема» употреблялся ранее лишь по отношению к так называемым проблемам разрешимости — задачам на построение алгоритма, распознающего заданное свойство формальных объектов. Рассмотрим более общую схему. Пусть решение какой-либо математической задачи A связано с выполнением бесконечной серии элементарных актов, в целом подчиненных определенному условию (зависящему от A). Каждая такая серия $S_\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ дает вариант решения и совокупность всех S_α образует полностью определяющий A класс P_A. Допустим еще (и в этом будет состоять требование элементарности), что каждый элементарный акт любой серии S_α можно охарактеризовать некоторым натуральным числом.

Задачи этого типа называются массовыми проблемами — в новом смысле.

Всякой серии $S_\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$ соответствует при этом такая функция $f(x)$, что для всех n натуральное число $f(n)$ характеризует акт α_n, классу P_A соответствует класс $\{f\}$ таких «разрешающих функций» проблемы A, полностью ее определяющий; мы будем писать $A = \{f\}$. Обратно, всякий класс A, состоящий из функций от натурального аргумента с натуральными значениями, определяет массовую проблему: построить функцию $f \in A$.

В случае, когда A — проблема разрешимости, соответствующий класс состоит из одного элемента. В качестве примера иного рода укажем на «проблему перечислимости»: построить функцию, множество значений которой есть заданное множество натуральных чисел.

Проблема $A = \{f\}$ называется разрешимой, если существует обще-рекурсивная функция $f \in A$, и неразрешимой в противном случае. Проблема A называется несобственной, если класс A пуст.

Естественным и общим образом определяется понятие сводимости одной массовой проблемы к другой. Пусть $A = \{f\}$, $B = \{g\}$. Тогда B сводится к A, если существует частично-рекурсивный оператор R, обладающий тем свойством, что $Rf = g \in B$ для всех $f \in A$ (где g зависит от f).

Рефлексивное и транзитивное отношение сводимости, естественно, разбивает совокупность всех массовых проблем на частично упорядоченное множество Ω попарно не пересекающихся классов — «степеней трудности», каждый из которых состоит из сводящихся друг к другу проблем. В частности, все разрешимые проблемы принадлежат к одной и той же (наименьшей) степени трудности 0.

Устанавливается следующий факт: частично-упорядоченное множество Ω степеней трудности есть импликативная структура. Это позволяет дать интерпретацию массовых проблем, аналогичную исчислению проблем А. Н. Колмогорова. Приводится ряд других результатов о строении Ω и о массовых проблемах того или иного типа, встречающихся в теории рекурсивных функций и математической логике. В частности, каждой логико-арифметической формуле можно сопоставить некоторую массовую проблему, степень трудности которой характеризует «степень неконструктивности» утверждаемого этой формулой высказывания. Если считать конструктивно истинными те и только те формулы, которым соответствуют разрешимые проблемы, то получается новое определение конструктивной истинности в арифметике.

А. А. Мучник (*Москва*). **Решение проблемы сводимости Поста.** После уточнения понятия алгоритма Чёрчем, Клини и др. была доказана алгоритмическая неразрешимость ряда проблем логики, алгебры, рекурсивной арифметики (Чёрч, Пост, Марков, Тьюринг, Новиков).

Исследуя арифметизованные проблемы разрешимости, Пост в 1943 г. поставил задачу: сводятся ли различные рекурсивно-перечислимые нерекурсивные множества (р.-п. нер.-м.) друг к другу. (Имеется в виду сводимость по разрешимости, т. е. сводимость проблем разрешимости соответствующих множеств). Эта задача получила название проблемы сводимости. Пост установил, что креативное множество не сводится к гиперпростому таблицами, а Трахтенброт доказал, что такая сводимость не может быть осуществлена обще-рекурсивными операторами. Однако Деккер показал, что для всякого р.-п. нер. м. G существует такое гиперпростое множество H, что G и H сводятся друг к другу частично-рекурсивными операторами (ч.-р. о.). Клини и Пост установили существование счетного множества различных степеней неразрешимости B_2-множеств (B_2-М.). (B_2-множество — рекурсивно-проективное множество, являющееся, как и его дополнение, проекцией некоторого дополнения к р.-п. м. Класс B_2-М. совпадает с классом множеств, сводящихся к р.-п. м.).

В данной работе дается решение проблемы Поста (строятся не сводящиеся друг к другу р.-п. нер. м.) и продолжается исследование исчисления массовых проблем, созданного Медведевым. Массовая проблема (м. п.) — наиболее общая задача на отыскание алгоритма. Исследование и классификация м. п. имеет большое значение для теории алгоритмов, а также для конструктивной логики и рекурсивной арифметики.

В работе доказаны следующие теоремы:

1. Существует р.-п. последовательность попарно не сводящихся друг к другу р.-п. нер. м.

2. Для всякого р.-п. нер. м. G существует такое р.-п. нер. м. H, что G не сводится к H, но H сводится к G ($H < G$).

3. Для всякого нер. B_2-М. E существует такое р.-п. нер. м. H, что E не сводится к H ($E \not\leqslant H$), и такое нер. B_2-М. G, что $G < E$.

4. Если проблема C является конъюнкцией конечного числа проблем разрешимости и сводится к проблеме A_ψ — продолжаемости ч.-р. функции (ч.-р. ф.) $\psi(n)$, то C — разрешимая проблема.

5. Если проблема перечислимости C сводится к проблеме отделимости р.-п. м., то C — разрешимая проблема.

6. Для всякой пары рекурсивно (р.) не отделимых B_2-М. $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ существует такое гиперпростое множество H, что проблема отделимости $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ не сводится к H, а также существует гиперпростая пара р.-п. м. H_1, H_2 такая, что $A_{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2} \not\leqslant A_{H_1H_2}$ (здесь $A_{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2}$ — проблема отделимости множеств E_1, E_2).

7. Существует р.-п. последовательность попарно не сводящихся проблем отделимости р.-п. м.

Перечисленные теоремы обобщаются на широкий класс так называемых условно вычислимых операций.

Б. С. Содномов (*Улан-Удэ*). **Непротиворечивость проективности некоторых замечательных множеств.** Арифметической суммой двух множеств E_1 и E_2, расположенных на действительной прямой, называется множество всех чисел x_1+x_2, где $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$.

Мы изучаем роль операции арифметического сложения множеств в образовании неизмеримых по Лебегу множеств.

Доказываем, что в минимальном семействе множеств, содержащем все замкнутые множества и инвариантном относительно конечного пересечения, разности и арифметического сложения, непротиворечиво существование неизмеримого по Лебегу множества. Для этого доказывается сначала, что арифметическое сложение в сочетании со счетным суммированием и взятием дополнения множества способно давать проективные множества сколь угодно высоких классов.

Наконец, показываем, что непротиворечива проективность некоторых замечательных множеств, и даем верхнюю оценку их классов. В числе таких множеств рассматриваем пример неизмеримого множества, данный Ван дер Варденом, множества, осуществляющие хаусдорфовское разбиение сферы, множество Лузина, которое измеримо, но не обладает свойством Бэра, множество Серпинского, все B-подмножества которого являются G_δ-множествами на нем.

Б. А. Трахтенброт (*Пенза*). **Дескриптивные классификации в рекурсивной арифметике.** Определяются некоторые конструктивные аналоги дескриптивных классификаций множеств в бэровском пространстве. Рассматривается взаимоотношение этих классификаций с рекурсивно-проективной классификацией Клини — Мостовского, а также с «аналитической иерархией» Клини.

В. А. Успенский (*Москва*). **Вычислимые операции, вычислимые операторы и конструктивно непрерывные функции.** Если отождествить функции с их графиками, то операторы, переводящие функции в функции, окажутся частным случаем операций, переводящих множества в множества. При этом операторы, переводящие вычислимые функции в вычислимые, окажутся частным случаем операций, переводящих перечислимые (т. е. рекурсивно-перечислимые) множества в перечислимые.

Вводится понятие вычислимой операции над множествами. Если ограничиться операциями, переводящими множества натуральных чисел в множества натуральных чисел, то возможно следующее определение вычислимой операции. Рассматривается вычислимая функция φ, аргументы и значения которой суть кортежи натуральных чисел; такая функция определяет *вычислимую операцию* V_φ, задаваемую формулой

$$V_\varphi(S) = \bigcup_{[m] \subseteq S} [\varphi(m)],$$

где через $[k]$ обозначено множество элементов кортежа $[k]$. Общее определение вычислимой операции приведено в заметке [1].

Всякая вычислимая операция переводит перечислимые множества в перечислимые. Вычислимый (т. е. частично рекурсивный) оператор можно определить как такой оператор, который переводит униформные (т. е. являющиеся графиками функций) множества в униформные.

Вычислимые операции (и тем самым вычислимые операторы) тесно связаны с понятием непрерывности. Именно, можно так ввести топологию в системах множеств (в частности, в системах функций), что всякая вычислимая операция (в частности, всякий вычислимый оператор) становится непрерывным отображением. Для получения нужной топологии достаточно в произвольной системе множеств M следующим образом определить «окрестности»: для всякого конечного множества F подсистема $O_F \subseteq M$, состоящая из всех принадлежащих системе M множеств, содержащих F в качестве подмножества, считается окрестностью любой «точки» $P \subseteq O_F$. Система всех всюду определенных одноместных арифметических функций (т. е. всех последовательностей натуральных чисел) с такой топологией есть не что иное, как обычное бэровское пространство. Система всех (не обязательно всюду определенных) одноместных арифметических функций («обобщенных» последовательностей натуральных чисел) с такой топологией называется обобщенным бэровским пространством.

Путем частичной «конструктивизации» понятия непрерывной функции получается понятие конструктивно непрерывной функции на бэровском и обобщенном бэровском пространстве. Класс конструктивно непрерывных функций на обобщенном бэровском пространстве совпадает с классом вычислимых операторов, переводящих в себя систему одноместных арифметических функций.

Строится более простой, чем принадлежащий Клини [2], пример функции, являющейся конструктивно непрерывной, но не равномерно-непрерывной на конструктивном компакте.

Лит.: 1. Успенский В. А., ДАН СССР, **103**, № 5, (1955). 2. Kleene S. C., Proc. of the Int. Congr. of Math., vol. I, (1952), 679—682.

В. А. Успенский (*Москва*). **Понятие программы и вычисляемые операторы.** 1. Существуют различные способы задания вычислимых (частично-рекурсивных) функций программами — различные способы программирования. Один из возможных способов программирования состоит в задании вычислимых функций их гёделевскими номерами; при этом способе программой функции является всякий ее гёделевский номер. Без ограничения общности можно считать, что программами всегда служат натуральные числа. Предлагается формальное определение, уточняющее понятие «способ программирования».

Под *нумерацией* множества M понимается произвольное отображение ξ произвольного множества натуральных чисел M; если $\xi(e)=m$, то e называется *номером* элемента $m \in M$ в нумерации ξ. Нумерация α системы вычислимых функций называется *потенциально вычислимой*, коль скоро существует вычислимая функция $f(k, x)$, обладающая следующим свойством: если k — номер функции $\varphi(x)$ в α, то $f(k, x)$ совпадает с $\varphi(x)$. Нумерация β системы вычислимых функций называется *вполне накрывающей*, коль скоро для всякой потенциально вычислимой нумерации α этой системы существует вычислимая функция g, обладающая следующим свойством: если k есть номер функции φ в α, то $g(k)$ есть номер этой же функции φ в β. Нумерация, являющаяся одновременно потенциально вычислимой и вполне накрывающей, называется *главной нумерацией 2-го рода*. Понятие «способ программирования» отождествляется с понятием «главная нумерация 2-го рода», а понятие «программа функции при данном способе программирования» — с понятием «номер функции в данной главной нумерации 2-го рода».

2. Оператор $\mathbf{K}$, переводящий вычислимые функции в вычислимые, называется конструктивным относительно данной нумерации системы вычислимых функций, коль скоро существует вычислимая функция h, обладающая следующим свойством: если $\varphi = \mathbf{K}(\psi)$ и k есть номер функции ψ в рассматриваемой нумерации, то $h(k)$ есть номер функции φ в этой же нумерации. Доказывается, что оператор, конструктивный относительно какого-либо способа программирования, конструктивен и относительно любого другого способа программирования; такие операторы называются просто *конструктивными*. Доказывается, что конструктивными являются те и только те операторы, которые могут быть продолжены до вычислимых (частично рекурсивных) операторов; устанавливается, что эта теорема может в известном смысле служить определением понятия «способ программирования»: именно, если всякий оператор, продолжаемый до вычислимого, является конструктивным относительно данной потенциально вычислимой нумерации α системы вычислимых функций, то α есть способ программирования (т. е. главная нумерация 2-го рода).

3. При получении результатов использовались, с одной стороны, восходящая к А. Н. Колмогорову идея абстрактного изучения нумераций, а с другой стороны — топологические методы (см. [1]). Способы программирования оказались тесно связанными с естественно вводимой в системе вычислимых функций топологией (см. предыдущее резюме). Ряд результатов получается из общих топологических соображений. Например, прямым следствием связности системы вычислимых функций как топологического пространства является следующая теорема: каково бы ни было свойство, для которого найдутся как вычислимые функции, обладающие им, так и вычислимые функции, им не обладающие, и каков бы ни был способ программирования, невозможен алгоритм, распознающий по программе, обладает ли функция с данной программой рассматриваемым свойством или нет.

4. Перечисленные результаты, касающиеся вычислимых функций, их программ и операторов над ними, являются частными случаями содержащихся в заметке [1] более общих результатов, касающихся перечислимых множеств, их программы и операций над ними; при этом основную роль играет введенное автором понятие вычислимой операции.

Лит.: 1. Успенский В. А., ДАН СССР, **105**, № 6, (1955).

Г. С. Цейтин (*Ленинград*). **Теорема о вложенных сегментах, теорема Коши и теорема Ролля в конструктивном анализе.** Для того чтобы построить конструктивные аналоги классических теорем о вложенных сегментах, Коши и Ролля, нужно заменить встречающиеся в их формулировках классические понятия их конструктивными вариантами и истолковать конструктивно логические связки, встречающиеся в формулировках этих теорем. Вместо понятия вещественного числа мы будем подставлять понятие конструктивного вещественного числа, которое совпадает с понятием вычислимого числа из статьи [1]. (Понятие конструктивного вещественного числа из работы [2] ему эквивалентно). Классическому понятию функции, непрерывной на некотором сегменте, будет у нас соответствовать понятие конструктивной функции, определенной во всех точках этого сегмента (см. [2]). Конструктивные варианты других употребляемых здесь понятий строятся очевидным образом. Запись конструктивного вещественного числа должна строиться таким образом, чтобы по ней можно было построить как алгорифм (или рекурсивную функцию), дающий последовательные рациональные приближения числа (основа), так и алгорифм, подтверждающий сходимость этой последовательности в себе (регулятор сходимости).

Формулировки рассматриваемых теорем носят следующий характер. Для всякого объекта определенного типа (последовательности вложенных сегментов, конструктивной функции с определенными свойствами) существует вещественное число, находящееся в определенном отношении к этому объекту. В конструктивном истолковании такое утверждение означает существование алгорифма, дающего по записи этого объекта запись соответствующего конструктивного вещественного числа. *Такие алгорифмы для всех трех теорем оказываются невозможными.* Таким образом, все эти теоремы в буквальной формулировке оказываются неверными в конструктивном анализе.

Квазиосновой будем называть алгорифм, дающий по всякому натуральному числу некоторое рациональное число и такой, что для полученной последовательности рациональных чисел *не может не существовать алгорифма* — регулятора сходимости (но предъявления самого регулятора сходимости не требуется). Если регулятор сходимости предъявлен, то по квазиоснове можно построить соответствующее конструктивное вещественное число. Говорим, что квазиоснова условно обладает некоторым свойством, если соответствующее конструктивное вещественное число обладает этим свойством в предположении, что регулятор сходимости существует. Оказывается, что для всех трех указанных теорем *можно построить алгорифмы*, дающие по записи всякого объекта рассматриваемого типа запись *квазиосновы*, условно находящейся в рассматриваемом отношении с этим объектом. Таким образом, в такой формулировке эти теоремы оказываются верными в конструктивном анализе. Отсюда же, в частности, следует невозможность опровержения всех этих теорем на примере.

Часть результатов, излагаемых в докладе, напечатана в работе [3].

Лит.: 1. Specker E., Journ. of Symb. Log., 14, (1949), 145—158. 2. Марков А. А., Успехи матем. наук, 9, № 3, (1954), 226—230. 3. Цейтин Г. С., Успехи матем. наук, 10, № 4, (1955), 207—209.

Г. С. Цейтин (*Ленинград*). **Простой пример ассоциативного исчисления с неразрешимой проблемой эквивалентности.** Строятся ассоциативное исчисление $\mathfrak{C}$ в алфавите $\{a, b, c, d, e\}$ с определяющей системой

$$\left\{\begin{array}{c} ac \longleftrightarrow ca \\ ad \longleftrightarrow da \\ bc \longleftrightarrow cb \\ bd \longleftrightarrow db \\ abac \longleftrightarrow abac^e \\ eca \longleftrightarrow ae \\ edb \longleftrightarrow be \end{array}\right.$$

и ассоциативное исчисление $\mathfrak{C}'$ в том же алфавите с определяющей системой, получаемой из определяющей системы $\mathfrak{C}$ добавлением еще двух соотношений:

$$ccca \longleftrightarrow ccc$$

$$cccb \longleftrightarrow ccc.$$

Доказываются следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. В исчислении $\mathfrak{C}$ неразрешима проблема эквивалентности.

Т е о р е м а 2. В исчислении $\mathfrak{C}'$ неразрешима проблема эквивалентности слову ccc.

Будем называть ассоциативными исчислениями специального вида такие ассоциативные исчисления, у которых все определяющие соотношения имеют вид $K \leftrightarrow \Lambda$. Тогда можно показать, что проблема эквивалентности для любого ассоциативного исчисления специального вида сводится к проблеме эквивалентности в исчислении $\mathfrak{C}$, а проблема эквивалентности пустому слову для любого ассоциативного исчисления специального вида сводится к проблеме эквивалентности слову ccc в исчислении $\mathfrak{C}'$. Таким образом, обе наши теоремы будут доказаны, если будет доказана неразрешимость общей проблемы эквивалентности пустому слову для ассоциативных исчислений специального вида. Но неразрешимость этой проблемы следует из доказанной П. С. Новиковым [1] неразрешимости проблемы тождества в теории групп, так как всякая группа с конечным числом образующих и определяющих соотношений может быть представлена при помощи ассоциативного исчисления специального вида.

Более подробно об этих же результатах см. работу [2].

Л и т .: 1. Н о в и к о в П. С., Труды Матем. ин-та АН СССР, 44, (1955). 2. Ц е й т и н Г. С., ДАН СССР, **107**, № 3, (1956).

Г. С. Цейтин (*Ленинград*). **Равномерная рекурсивность алгоритмических операторов над обще-рекурсивными функциями и каноническое представление для конструктивных функций вещественного аргумента.** Рассматриваются операторы над обще-рекурсивными функциями, сопоставляющие каждой обще-рекурсивной функции f некоторую обще-рекурсивную функцию F. Такой оператор можно задавать при помощи некоторой рекурсивной схемы так, чтобы F была равномерно рекурсивна в f (см. [1]), причем от этой схемы надо потребовать, чтобы для любой обще-рекурсивной функции f получающаяся частично-рекурсивная функция F была также обще-рекурсивной. Такие операторы будем называть равномерно рекурсивными (операторами Клини). Другой способ задания операторов над обще-рекурсивными функциями связан с использованием их гёделевых номеров. Будем оператор задавать при помощи алгорифма (частично-рекурсивной функции), который по всякому гёделеву номеру обще-рекурсивной функции f дает гёделев номер обще-рекурсивной функции F, причем выполнено условие однозначности, т. е. этот алгорифм перерабатывает гёделевы номера равных обще-рекурсивных функций в гёделевы номера равных обще-рекурсивных функций. Такие операторы будем называть алгорифмическими (операторами Маркова). Имеет место следующая

Т е о р е м а 1. Всякий алгорифмический оператор равномерно рекурсивен.

Конструктивные вещественные числа (см., например, [2]) представляют собой объекты, близкие по природе к обще-рекурсивным функциям, и существует некоторая аналогия между операторами над обще-рекурсивными функциями и функциями от конструктивных вещественных чисел. Алгорифмическим операторам над обще-рекурсивными функциями соответствуют конструктивные функции (см. [2]), определенные на всех конструктивных вещественных числах (или на всех конструктивных вещественных числах из фиксированного промежутка $\langle a, b \rangle$). Может быть построено также понятие функции от конструктивного вещественного числа, аналогичное понятию равномерно-рекурсивного оператора. Тогда оказывается справедливой теорема, аналогичная теореме 1. На основании такой теоремы может быть получено некоторое каноническое представление для конструктивных функций.

Рассмотрим конструктивную последовательность полигональных функций с рациональными вершинами, определенных на открытых промежутках с рациональными концами, причем 1) если промежутки определения каких-нибудь двух функций из этой последовательности имеют общую часть, то на этой общей части значения этих функций совпадают, и 2) для всякого конструктивного вещественного числа (из $\langle a, b \rangle$) существует такая функция из этой последовательности, которая на нем определена. Такая последовательность естественным образом задает некоторую конструктивную функцию, определенную для всех конструктивных вещественных чисел (из $\langle a, b \rangle$). Такую функцию будем называть квазиполигональной. Теорему о каноническом представлении конструктивных функций можно тогда сформулировать так.

Т е о р е м а 2. Всякая конструктивная функция, определенная на всех конструктивных вещественных числах (из $\langle a, b\rangle$), представима как предел конструктивно равномерно сходящейся конструктивной последовательности квазиполигональных функций.

Отсюда сразу следует

Т е о р е м а 3. Всякая конструктивная функция, определенная на всех конструктивных вещественных числах (из $\langle a, b\rangle$), конструктивно непрерывна (ср. [2]).

Л и т.: 1. K l e e n e S. C., Introduction to Math., N. Y., (1952). 2. М а р к о в А. А., Усп. матем. наук, 9, в. 3, (1954), 226—230.

Г. С. Цейтин (*Ленинград*). **О проблеме распознавания свойств ассоциативных исчислений.** Рассматриваются инвариантные (относительно изоморфизма) свойства ассоциативных исчислений. Пусть инвариантное свойство И таково, что 1) существует ассоциативное исчисление в n-буквенном алфавите, обладающее свойством И, и 2) существует ассоциативное исчисление, не включаемое ни в какое ассоциативное исчисление со свойством И. А. А. Марковым (см. [1], VI, § 11. 7. 1) установлено, что в таком случае проблема распознавания свойства И для ассоциативных исчислений в алфавитах из не менее чем $n+4$ букв неразрешима. В докладе излагаются некоторые дальнейшие результаты в этом направлении. Справедливы следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. Если инвариантное свойство И удовлетворяет условиям 1) и 2), то не разрешима проблема распознавания этого свойства в алфавитах, содержащих не менее $n+2$ букв.

Т е о р е м а 2. Для всякого натурального n может быть построено инвариантное свойство ассоциативных исчислений $И_n$, удовлетворяющее условиям 1) и 2) и такое, что существует алгорифм распознавания этого свойства для исчислений в алфавитах, содержащих не более $n+1$ буквы.

Теорема 1 доказывается аналогично указанной теореме А. А. Маркова. Важную роль в доказательстве играет особым образом определенная операция перевода слов в двубуквенный алфавит (вместо звеньев вида $\alpha\beta^i\alpha$, используемых в работе [1], берутся «звенья» вида $\alpha^{i+1}\beta^i\alpha^i\beta^{i+1}$). Для доказательства теоремы 2 в качестве свойства И берется свойство «быть изоморфным свободному ассоциативному исчислению в n-буквенном алфавите» (под свободным понимается исчисление без определяющих соотношений). При построении алгорифма распознавания этого свойства используется, во-первых, то, что если имеется изоморфизм некоторого ассоциативного исчисления на свободное ассоциативное исчисление, то всякое однобуквенное слово в свободном исчислении имеет однобуквенный прообраз, и, во-вторых, разрешимость проблемы распознавания единичности для ассоциативных исчислений в однобуквенном алфавите.

Более подробно эти результаты изложены в работе [2].

Л и т.: 1. М а р к о в А. А., Труды Матем. ин-та АН СССР, 42, (1954). 2. Ц е й т и н Г. С., ДАН СССР, 107, № 2, (1956).

Н. А. Шанин (*Ленинград*). **О конструктивном понимании математических суждений.** 1. Специфика конструктивных математических объектов обусловливает особое конструктивное понимание суждений о таких объектах. Принципы конструктивного понимания арифметических суждений, предложенные С. Клини [1], имеют, по нашему мнению, существенные недостатки. Эти недостатки имеют своим источником основную установку Клини, которую можно сформулировать следующим образом: каждая постоянная логико-арифметическая формула (имеется в виду определенный логико-арифметический язык) рассматривается как зашифрованная информация о возможности построения конструктивного объекта, удовлетворяющего определенному условию; эта информация является неполной до тех пор, пока не решена определенная конструктивная задача, состоящая в построении конструктивного объекта, удовлетворяющего соответствующему условию.

Предложенные С. Клини правила расшифровки информации, выражаемой формулой, одновременно являются правилами формулирования соответствующей конструктивной задачи. Эти правила имеют в своей основе разработанные А. Н. Колмогоровым (см. [2]) правила построения новых задач из данных при помощи логических связей.

2. Предлагаемое Клини сопоставление конструктивных задач всем без исключения постоянным логико-арифметическим формулам нам представляется искусственным. Применение к арифметическим суждениям правил «расшифровки» логико-арифметических формул приводит к суждениям, для которых опять возникает проблема конструктивного понимания, и эта проблема обычно не легче, чем для исходных суждений. Правила расшифровки не идемпотентны.

3. В нашей работе предлагаются иные, чем у Клини, принципы конструктивного понимания математических суждений. Основная установка:

а) некоторые суждения (но не все!) рассматриваются как зашифрованные утверждения о потенциальной осуществимости конструктивных объектов;

б) суждения, в построении которых не участвуют логические связи $\vee$ и $\exists$, не рассматриваются как зашифрованные суждения о потенциальной осуществимости конструктивных объектов; понимание таких суждений основано на экстраполяции определенной части классической логики;

в) суждение «Процесс применения алгорифма $\mathfrak{A}$ к исходному данному S не является безгранично продолжимым» считается достаточным основанием для суждения «Алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к S» (принцип А. А. Маркова; см. резюме доклада А. А. Маркова на этом съезде).

Лит.: 1. Kleene S. C., Journ. Symb. Logic, 10, № 4, (1945), 109—124. 2. Колмогоров А. Н., Math. Zeitschr., 35, (1932), 58—65.

В. И. Шестаков (*Москва*). **Векторно-алгебраический метод анализа и синтеза многотактных релейных систем.** Если все реле $Y_1, \ldots, Y_m$, принадлежащие к данной многотактной релейной системе, имеют одинаковые запаздывания τ при срабатывании и отпускании реле и если все независимые параметры $x_1, \ldots, x_m$ и все зависимые параметры $y_1, \ldots, y_n$ изменяются практически мгновенно и синхронно, то процесс изменения состояния этой релейной системы может быть описан следующим векторным уравнением:

$$\bar{y}(t+\tau) = \bar{f}(\bar{x}(t), \bar{y}(t)),$$

где $\bar{x} = [x_1, \ldots, x_m]$, $\bar{y} = [y_1, \ldots, y_n]$.

Если, в частности, $\bar{y}(t+\tau) = \bar{f}(\bar{x}(t))$, то релейная система называется *совершенно неавтономной* или *однотактной*.

Определение процесса $\bar{y}(t)$ по заданной функции $\bar{f}$ и заданному процессу $\bar{x}(t)$ называется *анализом системы*, а вычисление функции $\bar{f}$ по заданным процессам $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ — *синтезом системы*.

Сделанное выше предположение относительно характера работы реле системы позволяет заменить процессы $\bar{x}(t)$ и $\bar{y}(t)$ последовательностями $\bar{x}(j)$ и $\bar{y}(j)$, где $j = 0, 1, 2, \ldots$ Полагая $\bar{z} = [x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n]$, получаем возможность заменить всякую пару последовательностей $\bar{x}(j)$ и $\bar{y}(j)$ одной последовательностью $\bar{Z}(j)$. Совокупность l последовательностей $\bar{Z}(j)$ называется полной, если среди их членов встречаются все возможные значения вектора $\bar{Z}$. Для синтеза релейной системы пригодны лишь такие полные совокупности последовательностей $\bar{Z}(j)$, в которых каждая пара последовательностей удовлетворяет условию: если $\bar{Z}^{(r)}(j_1^{(r)}) = \bar{Z}^{(s)}(j_2^{(s)})$, то $\bar{y}^{(r)}(j_1^{(r)}+1) = \bar{y}^{(s)}(j_2^{(s)}+1)$.

Алгоритм синтеза системы двухпозиционных реле по заданной полной совокупности l последовательностей $\bar{Z}$, удовлетворяющих этому условию, можно представить следующими формулами:

$$\bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{s=1}^{l} \bar{f}^{(s)}(\bar{x}, \bar{y}), \qquad \bar{f}^{(s)}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{j=0}^{2^{m+n}-1} \bar{y}^{(s)}(j+1)\, p_{\gamma_j^{(s)}}(\bar{Z}^{(s)}),$$

где $\sum$ — знак булевого сложения, а $p_\gamma(\bar{Z})$ — конституенты единицы.

Используя алгебру многозначной логики в форме, приданной ей Веббом [1], указанный выше метод анализа и синтеза легко распространить на релейные системы, построенные из многопозиционных реле. Алгоритм синтеза таких систем представляется формулой, аналогичной приведенной выше для случая двухпозиционных реле.

В конце доклада приведены некоторые примеры анализа и синтеза многотактных релейных систем по изложенному методу и приведено сравнение этого метода с другими существующими методами (Ридда, Хафмана и др.). При рассмотрении примеров анализа и синтеза использованы специальные перфокарты.

Л и т.: 1. W e b b D., C. R. d. séances d. l. Soc. d. Sci. de Varsovie, Cl. III, 29, 153—168.

СЕКЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

Ю. В. Благовещенский (*Киев*). **О некоторых приближенных методах решения уравнений в частных производных.** В работе излагаются некоторые методы приближенного решения уравнений в частных производных. Рассматривается метод точечного склеивания области при использовании известных функций Грина для задачи в конечных разностях для склеиваемых областей.

Методика повышения точности решения задач на интеграторе ЭГДА. Излагаются эффективные методы построения конформных преобразований и некоторые методы решения задач с большим числом неизвестных для однородной и неоднородной краевых задач.

В. С. Королюк (*Киев*). **Е. Л. Ющенко** (*Киев*). **Определение линии уровня функции двух переменных на быстродействующих электронных счетных машинах.** Для определения линии уровня функции двух переменных используются схемы блуждания по сторонам квадратов сети прямых, параллельных осям координат, с фиксированным шагом.

Принятые схемы блуждания осуществляются в виде простых и экономных программ для быстродействующих электронных счетных машин, позволяющих фиксировать вершины квадратов, имеющих общие точки с линией уровня.

О. С. Кулагина (*Москва*). **О машинном переводе с французского на русский.** В излагаемой работе рассматривается задача перевода текстов математического и технического характера с французского языка на русский. Перевод делится на две части: 1) анализ французской фразы с целью выяснения связей между словами, 2) синтез русской фразы, т. е. воспроизведение тех же связей на русском языке. Соответственно этому правила перевода делятся на анализирующие и синтезирующие. Анализирующие правила построены по принципу дихотомии, в результате последовательной проверки ряда условий они вырабатывают информацию о форме и методе переводящего слова. Синтезирующие правила выбирают на основе этой информации нужную для перевода основу и нужное окончание из таблиц окончаний.

Для перевода подготовлен специальный словарь. Особенностью словаря для машинного перевода по сравнению с обычными является малое число переводов для каждого французского слова и наличие специальной информации о слове, которая включает: 1) указание на принадлежность к определенной части речи; 2) указание на возможность вхождения в обороты; 3) указание на омонимию или на наличие нескольких переводов; 4) номер особенности; 5) предложный код; 6) указание о правилах грамматического изменения данного слова и др.

Словарь разделен на две самостоятельные части: французскую (содержащую французские слова и информацию к ним) и русскую (содержащую русские слова и информацию к ним). При каждом французском слове указан номер переводящего его слова из русского словаря.

Составлен также словарь оборотов, включающий различные сочетания слов, не допускающие дословного перевода, и снабженный указаниями о переводе таких сочетаний.

Порядок работы машины при переводе следующий: 1) поиск слов в словаре и извлечение из словаря словарной информации; 2) обработка оборотов; 3) различение омонимов; 4) анализ французской фразы (который производится последовательно по частям речи в следующем порядке: глаголы — предлоги — существительные — местоимения — прилагательные). В результате этого анализа получается информация, необходимая для правильного выбора русских переводов всех слов и для построения русской фразы; 5) синтез русской фразы на основе сведений, полученных анализирующими правилами, т. е. образование требуемых грамматических форм русских слов и размещение их в нужном порядке.

Описанный опытный вариант перевода осуществляется на машине «Стрела».

А. А. Ляпунов (*Москва*). **О логических схемах программ.** Появление электронных цифровых вычислительных машин привело к развитию программирования. Выяснилась необходимость разработки специального аппарата для программирования, чтобы уменьшить трудоемкость программирования.

Задача, решение которой нужно программировать, состоит из некоторой исходной информации и алгоритма ее переработки. Этот алгоритм расчленяется на отдельные этапы. Преобразование информации на каждом этапе называется оператором счета (это правые операторы, воздействующие на числовые данные). Порядок выполнения операторов счета определяется данным алгоритмом. Он может быть либо строго фиксированным, либо зависящим от некоторых логических условий, т. е. от значения логических предикатов, вычисляемых тем же алгоритмом, или от логических переменных.

Операторы обозначаются большими латинскими буквами. Если оператор зависит от параметров, то эти параметры ставятся в качестве индексов. Логические предикаты и логические переменные обозначаются малыми буквами. У предикатов проверяемое условие ставится в качестве аргумента.

Вводится понятие произведения операторов и логических условий. Проверка логических условий и выполнение операторов совершаются по порядку, начиная слева. Если некоторое логическое условие равно единице, то после его проверки переходят непосредственно к следующему сомножителю. Если оно равно нулю, то должно быть указано, к какому сомножителю надлежит перейти. После выполнения некоторого оператора всегда переходят к следующему сомножителю. Произведение операторов и логических условий, обеспечивающее переработку исходной информации, которая нужна для решения поставленной задачи, называется схемой счета для данной задачи. Схема счета есть некоторый способ описания алгоритма решения предложенной задачи, не зависящий от того, какими средствами задача решается.

Для решения задачи на автоматической вычислительной машине схему счета нужно дополнить. Необходимо ввести операторы, которые описывают те преобразования состояния памяти машины, которые необходимы для выполнения очередных операторов счета; эти операторы называются операторами управления. Выделяются основные типы операторов управления: операторы переадресации, операторы изменения параметра, операторы переноса исходных данных или частей программы, операторы формирования, операторы переключения логических условий, операторы восстановления, операторы ввода параметра. Формулируются правила, которые указывают, в каких случаях для автоматического решения задачи нужно дополнить схему счета операторами управления и какими именно. Схема счета, дополненная всеми операторами управления, называется схемой программы. Схемы счета и схемы программы допускают как формальные, так и содержательные преобразования эквивалентности. Эти преобразования могут быть использованы для улучшения получаемой программы. Имеются правила для программирования операторов управления. Схемы программ используются как при ручном программировании, где они уменьшают трудоемкость работы и упрощают контроль программ, так и при автоматическом.

Л. Я. Нейшулер (*Москва*). **Табулирование функций и приложения.** С увеличением числа аргументов объем элементарно построенной таблицы делает ее практически не реализуемой даже при использовании интерполяции.

Такое положение поставило перед вычислительной математикой актуальную задачу создания специальных табличных конструкций и теории их построения.

Для функций трех и более переменных основным типом таких таблиц является k-членный, т. е. основанный на представлении (точном при приближенном) функции n переменных в виде k суперпозиций функций двух переменных, при этом наряду с выборкой из таблицы допускаются те или иные элементарные операции. В частности, иногда оказывается целесообразным сочетать обычную таблицу (в которой для сокращения объема шаг аргументов увеличивается) с k-членной таблицей для поправок. k-членные конструкции иногда дают возможность находить удовлетворительное табличное решение там, где обычные приемы недостаточны. С помощью введения искусственных параметров k-членные табличные конструкции могут в некоторых случаях найти применение и при табулировании функций одного-двух переменных.

Основными числовыми характеристиками таблицы данной конструкции являются: а) степень табулируемости — отношение объема таблицы, построенной прямым методом, к объему таблицы данной конструкции; б) ранг таблицы — отношение числа входов; в) таблица к числу аргументов табулируемой функции.

Основными задачами табулирования являются: а) построение таблиц с максимальной степенью табулируемости и б) построение таблиц с минимальным рангом. Такие таблицы мы называем оптимальными.

При построении оптимальных k-членных таблиц основную роль играет понятие однозначности k-членных представлений: k-членное представление однозначно, если всякое другое k-членное представление, сходное (с одинаковым порядком ввода аргументов) с данным, получается из данного тривиальным образом — заменой промежуточных функций двух переменных φ_i, входящих в данное представление, функциями от этих функций. Такая замена, естественно, не отражается на конструкции k-членной таблицы. Поэтому в случае однозначности представлений конкурирует между собой лишь конечное число попарно-несходных k-членных представлений.

Для выбора оптимального варианта из этого конечного числа можно дать удобные рекомендации, доводящие задачу выбора до рецептуры. Для ряда практически важных случаев это сделано.

Для часто встречающихся в вычислительной практике классов функций n переменных, а именно, допускающих n—1-членные и n-членные представления, решается вопрос об однозначности.

Для некоторых k-членных представлений могут быть даны необходимые и достаточные условия существования в виде системы дифференциальных равенств в частных производных. Промежуточные функции определяются как интегралы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Некоторые k-членные табличные конструкции могут найти применение и при табулировании уравнений с несколькими переменными и здесь возможно также ставить вопрос об оптимальном табулировании.

В некоторых случаях k-членные табличные конструкции могут найти применение при табулировании эмпирических функций нескольких переменных.

Помимо дальнейшего развития методов табулирования, можно указать на такую общую проблему, возникшую при решении задачи построения оптимальных таблиц, как выяснение условий однозначности представлений функций n переменных в виде суперпозиции K функций l ($l < n$) переменных.

Важной задачей является построение таблиц (для функций нескольких переменных, имеющих аналитическое выражение и эмпирических), специально приспособленных для ввода в вычислительные машины разных типов с учетом их особенностей и возможностей.

М. В. Пентковский (*Ленинград*). **О наилучшем преобразовании номограмм из выравненных точек.** В докладе приводится более совершенный и точный, чем это было сделано автором ранее, способ оценки погрешности вычисления по номограммам (до их построения), из выравненных точек для уравнений с тремя переменными.

Если номографируемое уравнение

$$F(u, v, w) = 0$$

и если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ — геометрические погрешности отыскания точек по заданным значениям переменных u и v на соответствующих шкалах и проведении через найденные точки разрешающей прямой и ε_3 — геометрическая погрешность определения точки пересечения разрешающей прямой с носителем ответной шкалы и прочтения ее пометки w, то погрешность найденного значения Δw будет оцениваться выражением

$$|\Delta w| \leqslant \varepsilon \left\{ \left| \frac{\partial w}{\partial u} \right| \frac{1}{|S_1'(u)|} + \left| \frac{\partial w}{\partial v} \right| \frac{1}{|S_2'(v)|} \right\} + \frac{\varepsilon_3}{|S_3'(w)|},$$

где $S_1(u)$, $S_2(v)$ и $S_3(w)$ — длины дуг соответствующих шкал номограммы. Оценка погрешностей ε и ε_3 не приводится. Они должны быть определены экспериментальным путем в результате анализа существующих номограмм.

Наилучшей номограммой называется та, для которой $\sup \left| \frac{\Delta w}{\varphi(w)} \right|$ в заданной области номографирования имеет наименьшую величину при заданных размерах номограммы; функция φ определяет способ оценки погрешности (по ее абсолютной величине, по относительной и т. п.).

Практическое применение введенного понятия показано на примере отыскания условий, которым должна удовлетворять наилучшая номограмма с параллельными шкалами: в зависимости от соотношения между пределами изменения переменных ответная шкала номограммы должна быть или внешней, или внутренней; внешние шкалы номограммы должны быть одинаковой длины.

М. В. Пентковский (*Ленинград*). **Новый способ проективного преобразования номограмм на сетке.** Для преобразования выбрана сетка типа *AA* с параллельными инвариантными прямыми. В ранее рассматривавшихся способах преобразования номограмма располагалась на сетке так, что прямолинейные шкалы совмещались с инвариантными прямыми сетки. В докладе предлагается начало и конец одной из шкал поместить в инвариантные точки сетки, а начало другой шкалы — на одну из инвариантных прямых и конец — на другую. При этом остается свободным один из параметров проективного преобразования, который может быть использован или для нахождения наилучшего расположения элементов номограммы, или для подбора соответствующей характеристики одной из шкал.

Приводятся рабочие формулы, необходимые для фактического выполнения преобразования номограммы и ее построения.

Н. И. Польский (*Киев*). **Метод Галеркина и его обоснование.** Хорошо известно, что метод Б. Г. Галеркина, предложенный в 1915 г. [1], находит широкое применение при решении многих задач математической физики. Однако обоснование этого метода дано сравнительно недавно. Для некоторых весьма важных типов дифференциальных уравнений сходимость метода Галеркина доказана в работах М. В. Келдыша [2] и Г. И. Петрова [3]. Кроме того, Г. И. Петровым было предложено интересное обобщение метода Галеркина.

В последнее время появилось большое число работ, в которых сходимость метода Галеркина для линейных и нелинейных задач доказывалась применением некоторых методов функционального анализа и топологии. В работах Л. В. Канторовича [4], С. Г. Михлина [5] и автора [6] была различными методами доказана сходимость метода Галеркина для линейных уравнений при весьма широких предположениях. Оказалось (см. [6]), что метод Галеркина, вообще говоря, не применим к отысканию собственных функций. Была получена оценка сходимости, совпадающая с оценкой Н. Н. Боголюбова для метода Ритца. В работе [6] были даны достаточные и в некотором смысле необходимые условия сходимости обобщения метода Галеркина, предложенного Г. И. Петровым. Оказалось, что в схему Г. И. Петрова укладываются метод моментов Н. М. Крылова и метод наименьших квадратов.

М. А. Красносельский [7] доказал сходимость метода Галеркина для широкого класса нелинейных уравнений. Оказалось, что упомянутые выше условия сходимости метода Г. И. Петрова также переносятся на случай нелинейных уравнений. Применяя топологические методы, М. А. Красносельский получил асимптотическую оценку сходимости для собственных значений и собственных функций при некоторых предположениях.

М. И. Вишиком [8] была установлена сходимость метода Галеркина для смешанных краевых задач.

Значительное число работ посвящено применению метода Галеркина к различным задачам теории упругости, гидродинамики и др.

Лит.: 1. Галеркин Б. Г., Вестн. инж., 19, (1915). 2. Келдыш М. В., Изв. АН СССР, сер. матем., 6, № 6, (1942). 3. Петров Г. И., Прикл. мат. и мех., 4 (3), (1940). 4. Канторович Л. В., ДАН СССР, 60, № 6, (1948); УМН, III, вып. 6 (28), (1948). 5. Михлин С. Г., ДАН СССР, 61, № 2, (1948); Прямые методы в матем. физике, 1950, 6. Польский Н. И., ДАН УССР, № 6, (1949); ДАН СССР, 86, № 3, (1952); Укр. матем. журн., 7, № 1, (1955). 7. Красносельский М. А., ДАН СССР, 73, № 6, (1950); УМН, IX, вып. 3 (61), (1954). 8. Вишик М. И., ДАН СССР, 97, № 2, (1954); ДАН СССР, 99, № 2, (1954); ДАН СССР, 100, № 3, (1955).

В. А. Пурто (*Москва*), **Т. Н. Молошная** (*Москва*). **О машинном переводе с английского языка на русский.** Необходимость проведения анализа грамматической структуры языка по формальным признакам. Возможность нескольких способов решения проблемы машинного перевода с одного языка на другой в зависимости от структуры языка. Небольшое количество словоизменительных аффиксов в английском языке. Явление конверсии. Лексико-грамматическая омонимия. Снятие омонимии как одно из необходимых условий правильного анализа английской и синтеза русской фразы. Анализ английской фразы: а) выделение классов слов английского языка по формальным признакам; б) выделение типовых структур английского предложения; трудность установления однозначных соответствий между английскими и русскими структурами; в) анализ английских структур путем расчленения предложений на двучленные или трехчленные связи; последовательные этапы анализа английского предложения по таким связям; г) «развертывание» проанализированной английской структуры в русскую. Анализ английских фраз, не поддающихся обработке путем применения метода связей, по принципу Бар-Хиллела: а) классификация английских слов в системе Бар-Хиллела; имена, предикативные слова и служебные слова; принципы индексации; б) анализ английской фразы проверкой правильности подбора индексов для членов предложения; снятие омонимии. Особенности организации словаря для машинного перевода с английского языка на русский в связи с указанными выше правилами анализа английского предложения.

Б. И. Сегал (*Москва*). **Приближенное решение уравнения теплопроводности.** Для приближенного решения уравнения теплопроводности в настоящее время пользуются методом конечных разностей. Этот метод сводит решение к простым и однообразным вычислениям, но объем этих вычислений во многих случаях весьма велик.

Автор использует существующие точные решения уравнения теплопроводности для получения приближенных решений. При этом данные начальные и граничные условия заменяются приближенно другими начальными и граничными условиями, а само дифференциальное уравнение оставляется без изменений.

Для начальной функции применяется приближенное разложение в сумму синусов. Граничные функции в рассматриваемом интервале времени заменяются следующим образом. Интервал времени разбивается на части и в каждой части граничная функция заменяется постоянной, равной значению этой функции в середине частичного интервала.

Решение представляется затем суммой рядов, в которой выделяется главный член в конечном виде. В оставшихся слагаемых ряды сходятся весьма быстро. Для упрощения вычислений построены специальные таблицы.

Рассматриваемый метод иллюстрируется численными примерами. Во многих случаях объем требующихся вычислений по этому методу в 15—20 раз меньше, чем по методу конечных разностей.

Другое преимущество рассматриваемого метода состоит в том, что приближенное распределение температуры получается не в виде таблицы, а в форме простого аналитического выражения.

М. Г. Слободянский (*Москва*). **О приближенном решении линейных краевых задач и оценки погрешности.** 1. Во многих линейных краевых задачах определение искомой величины или производных искомых функций до определенного порядка, или некоторого линейного оператора от искомых функций можно свести к задаче об определении скалярного произведения элементов некоторого гильбертова пространства. Это может быть сделано путем введения специальным образом построенных главных частей функции Грина.

В докладе рассмотрен вопрос о построении указанных функций в некоторых общих задачах теории потенциала и теории упругости.

2. Далее строится приближенное значение для указанного скалярного произведения и оценка погрешности.

Рассматривается также вопрос о построении указанных оценок погрешности путем введения обобщенных функционалов и обобщенных производных.

3. Для определения приближенных решений рассматриваемых краевых задач часто применяются способы, основанные на представлении решения в виде суммы произведений заданных координатных функций на некоторые постоянные (метод наименьших квадратов, метод Ритца—Галеркина и др.).

В работе рассмотрен вопрос о наиболее целесообразном способе определения указанных приближенных решений при использовании различных оценок погрешностей, исходя из условия, что оценка погрешности была наименьшей.

4. В качестве примеров рассмотрены некоторые краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, уравнений в частных производных и приведены численные примеры.

В. Е. Шаманский (*Киев*). **О приближенном решении краевых задач для уравнений Пуассона (Лапласа) методом склеивания.** Рассматривается приближенный метод решения краевых задач для уравнения Пуассона (Лапласа), основанный на идее склеивания решений для более простых областей. Предполагается, что заданная область может быть представлена в виде суммы непересекающихся областей, для каждой из которых возможно получение эффективного решения соответствующей краевой задачи. Метод состоит в том, что на линиях разделения подобластей определяющие величины задаются в виде, например, алгебраического или тригонометрического полинома с неопределенными коэффициентами. В каждой из подобластей строятся решения краевых задач с использованием этих величин. Неопределенные коэффициенты находятся из условия минимума выражения

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma k} \left[\alpha_{nk}^2(s) + \beta_{nk}^2(s)\right] ds, \tag{1}$$

где $\alpha_{nk}(s)$ — скачок нормальных, а $\beta_{nk}(s)$ — скачок касательных производных упомянутых решений в соседних подобластях при переходе через k-ю линию соприкасания подобластей; интегралы берутся по всем линиям соприкасания γ_k.

Таким образом, задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Выражение (1) с точностью до некоторой постоянной мажорирует максимальное отклонение приближенного решения от точного. При некоторых ограничениях доказывается равномерная сходимость приближенных решений к точному в замкнутой области.

Ю. И. Янов (*Москва*). **О равносильности и преобразованиях схем программ.** I. Схема программы (с. п.) содержит указание зависимости порядка выполнения операторов от значений выделенных двузначных функций, называемых логическими переменными. Под оператором можно понимать всякое преобразование содержимого памяти: вычисление функций, изменение команд, перенос величин из одних ячеек в другие и т. п. В частности, в результате выполнения каждого оператора могут так или иначе измениться значения логических переменных, которые в свою очередь определяют порядок выполнения операторов. Последовательности наборов значений логических переменных, согласованные со способностью каждого оператора данной с. п.

изменять значения некоторых логических переменных, будем называть допустимыми последовательностями. Каждой такой последовательности наборов в данной с. п. соответствует некоторая последовательность выполняющихся операторов, которую мы будем называть значением данной с. п. для этой последовательности наборов. Две схемы программы назовем равносильными, если их значения совпадают для любой допустимой последовательности наборов.

Возникают следующие задачи:

1. Найти алгоритм, который для любой пары схем давал бы ответ, равносильны они или не равносильны.

Такой алгоритм можно построить, используя понятие стационарных погружений с. п.

Аналогичная задача возникает, если понятие равносильности заменить понятием частичной равносильности, когда рассматриваются только конечные значения с. п. Эта задача также имеет положительное решение.

2. Тождественные преобразования с. п. Существует конечная полная система элементарных преобразований, применяя которые можно произвольную с. п. перевести в любую ей равносильную.

II. Удобным аппаратом для записи и исследования зависимости порядка выполнения операторов от значений логических переменных являются так называемые матричные схемы работы. Задачи 1 и 2 решаются для них более просто, чем для с. п.

III. Решения задач 1 и 2 получены при условии, что все операторы, входящие в схему, индивидуализированы и всякий оператор может изменять значения отнесенных ему логических переменных произвольным образом. При синтезе с. п. возникают задачи, аналогичные 1 и 2 при наличии определяющих соотношений между операторами, а также при наличии определенных условий, наложенных на способность операторов изменять значения логических переменных.

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНИКИ

И. Г. Араманович (*Москва*). **Эффективное решение плоской задачи теории упругости для неоднородной двусвязной области, ограниченной прямой и окружностью.** Рассматривается упругая полуплоскость с круговым отверстием, в которое впаяно упругое кольцо, причем упругие постоянные кольца и полуплоскости различны.

Изучается напряженное состояние этой неоднородной среды, вызываемое заданной системой внешних усилий.

Задача приводится к одному сингулярному интегральному уравнению с последующим сведением его к бесконечной квазирегулярной системе линейных уравнений.

В случае однородной области получается решение задачи о полуплоскости с круговым отверстием, отличное от решения Джеффри.

(Часть материала опубликована в ДАН СССР за 1955 г., т. 104, № 3).

Н. Х. Арутюнян (*Ереван*) **и К. С. Чобанян** (*Ереван*). **Кручение и изгиб призматических стержней, составленных из различных материалов с учетом ползучести.** Рассматривается задача о кручении и изгибе призматических стержней, составленных из нескольких отдельных призматических тел, спаянных по боковым поверхностям, когда модуль сдвига и мера ползучести материалов этих тел различны.

Получены основные уравнения задачи и те необходимые условия, которыми однозначно определяется функция напряжения во всей области поперечного сечения стержня. Функция напряжения зависит также от времени. Дается способ решения этих уравнений. Формула Бредта о циркуляции касательных напряжений обобщается для данной задачи.

Одновременно дается приближенный способ решения задачи о кручении и изгибе составных стержней с тонким усиливающим покрытием.

Приводится решение ряда конкретных задач, в которых исследуется влияние ползучести на напряжение состояния скручиваемого и изгибаемого стержня.

Даются формулы для изменения угла закручивания и компонент напряжения в зависимости от времени.

Г. И. Баренблатт (*Москва*). **О некоторых нелинейных параболических задачах гидродинамической теории нестационарной фильтрации.** Задачи нестационарной фильтрации жидкости и газа в пористой среде приводят, вообще говоря, к нелинейным параболическим уравнениям вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} a^2\Delta\left[\varphi(u)\right], \qquad (1)$$

где φ — положительная неубывающая функция своего аргумента.

В работе рассматриваются различные постановки краевых задач для этих уравнений; исследуются краевые задачи и задачи Коши, отвечающие некоторым частным видам начальных и граничных условий и обладающие инвариантностью относительно тех или иных групп непрерывных преобразований, в частности, относительно группы преобразований подобия. Решение этих инвариантных краевых задач и задач Коши приводится к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Получаемые решения — так называемые автомодельные решения — помимо непосредственного интереса соответствующих им задач, дают возможность получить качественное представление о поведении решений более общих типов, дать важные асимптотические оценки и т. п.

Далее рассматриваются приближенные методы решения более общих классов задач, близкие по идее к известным приближенным методам теории пограничного слоя в несжимаемой вязкой жидкости. Одна группа этих методов использует в качестве «опорных» решений рассмотренные выше автомодельные решения, другая основана на приближенном представлении решения многочленами с коэффициентами, зависящими от времени и определяемыми из условий на границах и из моментных интегральных соотношений, получаемых интегрированием уравнения (1) по рассматриваемой области изменения пространственных переменных.

Наконец, рассматриваются общая постановка и решение некоторых конкретных задач фильтрации сжимаемой жидкости в неупругой пористой среде, приводящие к следующей задаче:

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a_1^2 \Delta u \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} \leqslant 0 & \\ & a_1^2 \leqslant a_2^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = a_2^2 \Delta u \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0 & \end{array} \tag{2}$$

причем начальное значение функции u постоянно по всей области изменения пространственных переменных, а граничные значения этой функции немонотонно зависят от времени. Полученные решения показывают существенное влияние неупругости деформаций пористой среды, выражающейся в неравенстве коэффициентов a_1^2 и a_2^2, на характер изменения функции u.

В. В. Болотин *(Москва)*. **Некоторые проблемы теории упругой устойчивости.** Дается постановка проблем, возникших в последние годы в теории упругой устойчивости, но разрешенных до сих пор лишь частично. Ставятся вопросы о существовании собственных значений у несамосопряженных краевых задач определенного типа, о зонах неустойчивости для систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, о решениях нелинейных систем вблизи точек разветвления, а также вблизи некоторых других специальных точек.

Р. Э. Виноград (*Москва*). **Необходимые и достаточные условия правильности системы дифференциальных уравнений.** В работе изучается система линейных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\, x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

с ограниченными коэффициентами $a_{ij}(t)$.

Пусть $\bar{x}_1(t)$, $\bar{x}_2(t), \ldots, \bar{x}_n(t)$ — векторные решения (1) и пусть $G_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ — детерминант Грамма из векторов с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$. Положим $\Gamma_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sqrt{G_{i_1 i_2 \ldots i_r}}$.

Доказываются теоремы.

1. Если система (1) правильна, то существуют пределы

$$\lambda_i = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln |\bar{x}_i(t)|, \tag{2}$$

и если векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ образуют нормальную фундаментальную систему решений, то существуют также пределы

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \Gamma_{i_1 i_2 \ldots i_r}$$

и они равны $\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \ldots + \lambda_{i_n}$.

2. Для правильности системы (1) достаточно, чтобы для какой-либо фундаментальной системы решений существовали пределы

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \Gamma_{12\ldots r} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n).$$

3. Пусть для какой-либо системы решений пределы (2) существуют. Считая их занумерованными в порядке возрастания

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n,$$

выделим среди них равные

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n_1} = \Lambda_1,$$

$$\lambda_{n_1+1} = \ldots = \lambda_{n_2} = \Lambda_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{n_{q-1}+1} = \ldots = \lambda_n = \Lambda_q.$$

Тогда для правильности системы (1) достаточно, чтобы существовали и равнялись указанным величинам следующие пределы:

$$\lim \frac{1}{t} \ln \Gamma_{12\ldots n_1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n_1},$$

$$\lim \frac{1}{t} \ln \Gamma_{n_1+1\ldots n_2} = \lambda_{n_1} + \ldots + \lambda_{n_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lim \frac{1}{t} \ln \Gamma_{n_{q-1}+1\ldots n} = \lambda_{n_{q-1}+1} + \ldots + \lambda_n.$$

Показано, что условия теорем 1 и 3 являются необходимыми и достаточными, т. е. не могут быть улучшены.

И. И. Ворович *(Ростов на Дону)*. **Некоторые задачи нелинейной теории оболочек.** Для системы уравнений теории пологих оболочек и пластин при больших прогибах и широкого класса граничных условий, который исчерпывает в основном практически возможные случаи заделки оболочки, доказана теорема существования решений. Доказательство основывается на вариационных соображениях, что дает возможность установить существование решения в «целом», без каких бы то ни было предположений о малости нелинейных членов. Исследованы дифференциальные свойства решений в зависимости от степени гладкости внешней нагрузки и границы оболочки.

Рассмотрены наиболее употребительные варианты прямых методов в теории оболочек большого прогиба. Исследована возможность построения приближений на каждом этапе применения методов Ритца и Бубнова—Галеркина; доказана сильная компактность этих приближений в некоторых функциональных пространствах; даны оценки погрешностей, возникающих при использовании прямых методов. Даны некоторые рекомендации по улучшению сходимости приближений.

Рассматривается вопрос об устойчивости цилиндрической оболочки в нелинейной постановке и о ее поведении после потери устойчивости.

Доказательства даются в целом и основаны на некоторых вариационно-топологических соображениях. Устанавливается возможность применения прямых методов к решению соответствующих уравнений и в некоторых случаях оцениваются возникающие при этом погрешности.

Рассмотрена в нелинейной постановке задача о движении оболочки под действием внешних сил и с учетом внутреннего трения. Основные уравнения задачи образуют некоторую нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных. На основе механических соображений (принцип Остроградского —Гамильтона) для данной системы вводится обобщенное решение. При некоторых условиях доказывается существование обобщенного решения. При определенных дополнительных условиях доказывается существование классического решения на достаточно малом отрезке времени. Рассматривается вопрос о существовании периодических режимов движения оболочки под воздействием поперечных периодических сил. Обосновывается возможность применения прямых методов для решения смешанной задачи и для отыскания периодических режимов. Даются оценки погрешностей.

К. З. Галимов (*Казань*). **Метод дополнительной работы в нелинейной теории оболочек.** Формулируются геометрические граничные условия нелинейной теории оболочек в усилиях и моментах.

Дается обобщение метода дополнительной работы, позволяющее решать нелинейные задачи теории оболочек. Дается применение к нелинейным задачам теории пологих оболочек.

С. К. Годунов (*Москва*). **О единственности решения уравнений гидродинамики.** Рассматривается теорема единственности для системы уравнений гидродинамики

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p\,(v,\,E)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial\left(E + \frac{u^2}{2}\right)}{\partial t} + \frac{\partial pu}{\partial x} = 0.$$

Как известно, эта система, даже при гладких начальных данных, не всегда допускает непрерывные решения в достаточно большой области. Поэтому приходится вводить в рассмотрение разрывные решения, удовлетворяющие уже не дифференциальным, а некоторым интегральным уравнениям. Эти уравнения представляют собой законы сохранения импульса, объема и энергии.

Для обеспечения единственности на решения приходится наложить некоторые дополнительные ограничения. Именно, надо потребовать, чтобы выполнялся закон возрастания энтропии.

Теорема единственности доказывается в следующей формулировке.

Если два кусочно-непрерывных и кусочно-гладких решения с кусочно-гладкими линиями разрывов таковы, что совокупность разрывов обоих этих решений делит на конечное число кусков область D, ограниченную снизу отрезком $[a,\ b]$ прямой $t=0$, а сверху — дугой, пространственно подобной для обоих решений, то эти решения совпадают в $Д$, если совпадают на отрезке $[a,\ b]$.

По идее доказательство близко к теореме Хольмграна о единственности неаналитического решения у аналитических систем дифференциальных уравнений.

А. С. Григорьев (*Москва*). **Равновесие безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях за пределами упругости.** Рассматривается равновесие безмоментных оболочек с жесткими днищами, имеющих в ненапряженном состоянии форму кругового цилиндра. Исследуется напряженное состояние таких оболочек под действием внутреннего давления при больших деформациях за пределом упругости. Построен эффективный метод расчета. Решен ряд конкретных задач.

В. Л. Данилов (*Казань*). **Интегро-дифференциальное уравнение движения водонефтяного контакта в пористой среде.** Задача Лейбензона—Маскета о перемещении поверхности раздела воды и нефти в пористой среде сведена к интегро-дифференциальному уравнению.

Рассмотрены частные задачи о движении контура нефтеносности и конусообразовании в пластах с подошвенной водой.

Г. А. Домбровский (*Москва*). **Методы приближенного решения плоских задач об установившихся движениях газа.** 1. Дозвуковое движение газа. Как и в приближенном методе С. А. Чаплыгина, задача о движении газа сведена к краевым задачам теории функций комплексного переменного. При этом связь между давлением p и плотностью ρ, отвечающая приближенным уравнениям, получается более близкой к адиабатической, чем в методе С. А. Чаплыгина.

Метод прилагается к решению ряда задач газовой динамики.

а) Для решения определенного класса задач о газовых струях, точному решению которых посвящен труд С. А. Чаплыгина «О газовых струях», предлагается общий прием, который позволяет свести задачу о движении сжимаемой жидкости к аналогичной задаче о движении жидкости несжимаемой. На конкретном примере показаны сравнительная простота метода и его высокая точность в широком диапазоне дозвуковых скоростей, вплоть до скорости звука.

б) Приводится способ решения некоторых задач о газовых струях, точный метод С. А. Чаплыгина к решению которых не применим. К таким задачам относятся рассматриваемые задачи об истечении газа из сосуда конечной ширины и бесконечной длины с прямолинейными стенками и о струйном обтекании решетки плоских пластинок.

в) Метод прилагается к решению задач о плавном обтекании газом замкнутых профилей как без циркуляции, так и с наличием циркуляции, причем проведено построение такого течения газа, которое при стремлении скорости набегающего потока к нулю становится сколь угодно близким к исходному течению несжимаемой жидкости.

г) Предлагается новый простой способ расчета скорости и коэффициента давления на профиле при обтекании его потоком газа, если известно обтекание этого профиля несжимаемой жидкостью.

2. Сверхзвуковое движение газа. Метод также основан на замене точных уравнений движения некоторыми приближенными, общие решения которых имеют простой вид. Задача о сверхзвуковом движении газа при этом сводится к краевым задачам для волнового уравнения. В широком диапазоне сверхзвуковых скоростей связь между давлением и плотностью, отвечающая приближенным уравнениям, как и в дозвуковом случае, является весьма близкой к адиабатической.

С помощью полученных общих решений разрешены следующие основные краевые задачи: а) задача Коши, б) задача Гурса, в) задача с заданными условиями на характеристике и свободной поверхности, г) задача об обтекании стенки.

Проведено исследование конкретной физической задачи о сверхзвуковом истечении газа из сопла.

А. И. Каландия (*Тбилиси*). **Об одной смешанной задаче теории упругости.** Рассматривается (плоская) задача о давлении жесткого штампа на границе кругового отверстия, проделанного в упругой бесконечной среде, при отсутствии сил трения. Методом теории функций комплексной переменной задача приводится к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению вида уравнения теории крыла конечного размаха.

Для решения этого уравнения используется способ Мультоппа.

А. А. Каспарьянц (*Одесса*). **Нестационарная задача диффракции звуковых волн.** Решена задача о диффракции на поверхности абсолютно жесткого тела звуковых волн, распространяющихся в идеальном (без внутреннего трения) газе от точечного источника, действие которого начинается в некоторый, принимаемый за начальный момент времени.

Получено значение потенциала скорости в замкнутой интегральной форме для произвольного момента времени после «включения» звукового источника.

Формула для потенциала скорости, полученная в работе, дает возможность с единой точки зрения подойти к решению стационарной и нестационарной задач теории дифракции и охватить их единым методом исследования.

К. Р. Коваленко (*Одесса*). **О некоторых математических проблемах динамической устойчивости упругих континуумов.** Задачи на динамическую устойчивость стержней и других конструкций под действием пульсирующих нагрузок рассматриваются главным образом в линейной постановке. Однако и в такой постановке возникают многие вопросы, которые еще требуют своего решения.

Когда дифференциальные уравнения в частных производных рассматриваемой задачи не распадаются на отдельные обыкновенные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами с одной неизвестной функцией, неизвестны не только точные решения, но и отсутствуют теоремы о существовании зон устойчивости.

В случае нераспадающихся систем результаты, получаемые обычными методами теории возмущений, находятся в явном противоречии с результатами, вытекающими из теории М. Г. Крейна мультипликаторов первого и второго рода для канонических систем с конечным числом степеней свободы.

В обычной трактовке задач динамической устойчивости, даже для распадающихся систем, получается парадоксальный вывод о том, что силы сколь угодно малой амплитуды и сколь угодно малой частоты, могут вызвать неустойчивость. Этот парадоксальный вывод не может быть устранен введением внешнего линейного сопротивления, в то время как он полностью устраняется введением линейного внутреннего трения.

А. М. Кочетков (*Москва*). **Об одной осесимметричной задаче предельного равновесия сыпучей среды.** Рассматривается предельное состояние сыпучей среды в форме кругового конуса, находящейся под действием собственного веса. Эта задача в предположении полной сыпучести была рассмотрена Добкиным. В настоящей работе дано решение без предположения о полной сыпучести. Задача сводится к решению системы двух обыкновенных уравнений первого порядка.

М. А. Красносельский (*Воронеж*). **Об исследовании точек бифуркации нелинейных уравнений.** Одним из основных вопросов, возникающих при исследовании нелинейных уравнений, является вопрос о точках бифуркации. Известный метод Ляпунова—Шмидта исследования точек бифуркации требует изучения так называемого уравнения разветвления, которое для абстрактных случаев в последние годы изучалось Кронином, Бертлем и другими авторами. Фактическое построение уравнения разветвления затруднительно. Более удобный метод заключается в построении решений в виде рядов по степеням подходящим образом подобранного малого параметра. Этот метод применим в более частных случаях и требует довольно сложного анализа формально конструируемых рядов.

Исследуется нелинейное уравнение

$$\varphi = A(\varphi; \lambda), \tag{1}$$

имеющее при всех значениях параметра λ нулевое решение. Для выяснения того, при каких значениях параметра уравнение (1) имеет малые ненулевые решения, могут применяться комбинаторно-топологические методы, развивающие идеи Лере—Шаудера. Эти методы позволяют для широких классов задач провести качественный анализ точки ветвления непосредственно по самому уравнению, не прибегая к построению решений каким-либо способом. Проведение качественного анализа совокупностей ненулевых решений уравнения (1) не связано со сложными вычислениями.

В частности, просто исследуется вопрос о критических силах и о формах потери устойчивости в задаче о продольном изгибе шарнирно закрепленного стержня переменной жесткости. Новые результаты получены при анализе уравнения А. И. Некрасова из задачи о волнах на поверхности тяжелой жидкости.

С. Г. Крейн (*Воронеж*). **Математические вопросы теории движения твердого тела с полостями, наполненными жидкостью.** В докладе предполагается осветить вопросы существования движения вязкой несжимаемой жидкости и вихревых движений идеальной жидкости при заданном движении тела и заданных начальных условиях. Рассматриваются нелинейные и линеаризованные задачи. Изучаются вопросы существования малых колебаний жидкости, полноты системы нормальных колебаний и характеристики спектра частот в трех случаях: движения идеальной жидкости вблизи положения равновесия при наличии свободной поверхности, движения идеальной жидкости, близкие к вращению ее как твердого тела, колебания вязкой жидкости вблизи стационарного движения.

В последней части доклада рассматриваются совместные колебания твердого тела и жидкости в основном в тех же случаях.

В. Д. Купрадзе (*Тбилиси*). **О некоторых новых работах по математической теории упругости в Тбилисском университете.** Исследования, о которых идет речь, велись главным образом вокруг двух проблем: а) граничные задачи и б) асимптотическое поведение собственных чисел и собственных функций.

Известно, что ставшие теперь классическими некоторые математические методы теории упругости, отличаясь значительной эффективностью, часто обнимают лишь сравнительно ограниченный круг вопросов; так, метод аналитических функций комплексных переменных применяется в основном лишь при изучении плоских задач статики; метод преобразований Фурье дает эффективные результаты лишь в задачах с прямолинейными границами и т. д.

В рассматриваемых в докладе работах построена опирающаяся на теорию потенциала простая и общая теория граничных задач равновесия и колебаний как изотропных, так и анизотропных плоских и пространственных упругих тел.

Доказаны новые теоремы существования и единственности; в частности, установлена разрешимость для любых значений частот колебаний всех основных граничных задач для областей, содержащих бесконечно удаленную точку; сформулированы общие, достаточные для единственности условия на бесконечности, допускающие физическую интерпретацию.

Метод решения граничных задач и полученные при этом результаты хотя и уступают в частных случаях в отношении эффективности другим специальным методам, но при современном состоянии вычислительной техники могут рассматриваться как вполне пригодные для целей приложения; в отдельных же задачах (например, в задаче о слоистой среде с параллельными границами) они столь же эффективны, как и те, которые устанавливаются специальными методами.

Другая группа работ посвящена изучению асимптотического поведения собственных функций в задачах на собственные колебания анизотропных упругих тел. Эти результаты являются новыми и могли быть получены на основе развития общей теории граничных задач. В частных случаях из них получаются известные в литературе асимптотические формулы теории упругости и классическая асимптотическая оценка Карлемана для собственных функций колеблющейся мембраны.

Г. К. Михайлов (*Москва*). **Точное решение одной задачи об установившемся движении грунтовых вод в вертикальной плоскости со свободной поверхностью и участком высачивания.** Метод решения задач о движении грунтовых вод, основанный на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений, применен П. Я. Полубариновой-Кочиной к эффективному решению задачи о фильтрации в прямоугольной перемычке. Ею же и докладчиком была исследована задача о фильтрации в трапецоидальной перемычке с вертикальной верховой гранью.

В настоящем докладе рассматривается обобщение задачи о фильтрации в прямоугольной перемычке — задача о фильтрации жидкости в прямоугольном горизонтальном пласте, вдоль одной из вертикальных границ которого происходит высачивание в бассейн с жидкостью другой плотности. Другая вертикальная граница пласта принимается за эквипотенциаль, а горизонтальные границы — за линии тока. При этом предполагается, что жидкости в пласте и в бассейне не смешиваются, так что в пласте у выхода образуется свободная поверхность, отделяющая движущуюся жидкость от покоящейся жидкости в бассейне. В случае более тяжелой жидкости в бассейне отрыв происходит у подошвы пласта, в случае более легкой — у кровли.

Область годографа скорости для этой задачи совпадает с таковой для случая фильтрации в прямоугольной перемычке, однако на контуре области фильтрации здесь на две угловые точки больше, чем в прямоугольной перемычке. Число неустранимых особенностей в обоих случаях одинаково.

Приведено общее решение задачи. Подробно рассмотрен случай истечения из полубесконечного пласта в бассейн однородной жидкости. Для этого случая проведены некоторые числовые расчеты, в частности, рассмотрены размеры области вторжения жидкости из бассейна в пласт. При этом найдено значительное расхождение результатов точного решения с приближенным гидравлическим решением задачи.

Общее решение представлено, как обычно, в параметрической форме, в виде интегралов от полных эллиптических интегралов первого рода и иррациональных множителей. Для некоторых случаев даны оценки и разложения в ряды.

А. А. Мовчан (*Москва*). **Линейные колебания пластинки, движущейся в газе с большой скоростью.** Рассматривается задача о линейных колебаниях пластинки, движущейся в газе. Силы избыточного давления учитываются приближенной формулой. Задача сводится к исследованию спектра собственных значений несамосопряженной краевой задачи для уравнения четвертого порядка. Полученные результаты об изменении собственных значений с изменением скорости движения пластинки позволяют сделать некоторые выводы об устойчивости колебаний.

Н. Н. Моисеев (*Ростов на Дону*). **Некоторые задачи точной теории установившихся движений тяжелой жидкости.** Доклад посвящен изучению форм равновесия тяжелой жидкости, текущей над неровным дном (контур дна $\zeta_0(x)$ предполагается периодической функцией x). Задача сводится к системе двух нелинейных интегральных уравнений. Доказывается существование и единственность решений этих уравнений в некотором достаточно малом шаре пространства C, если контур дна таков, что ни один из коэффициентов Фурье

$$\alpha_m = \int\limits_0^{2\pi} \zeta_0'(x) \sin mx dx \quad \text{и} \quad \beta_m = \int\limits_0^{2\pi} \zeta_0'(x) \cos mx dx$$

не равен 0. Если одно из чисел α_m и β_m равно 0, то существуют решения, отличные от найденных, которые переходят в нетривиальные решения Некрасова—Струика при $\nu = \| \zeta_0'(x) \| \to 0$.

Доказывается аналитичность полученных решений.

Теория Некрасова—Струика получается как частный случай при $\|\zeta'_0(x)\| = 0$. Полученные решения позволяют дать полное физическое описание установившегося потока тяжелой жидкости над неровным дном.

Н. Н. Моисеев (*Ростов на Дону*). **Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность.** 1. В линейной постановке указанная задача сводится к системе интегро-дифференциальных уравнений. Вводится некоторая специальная полная ортонормированная система собственных функций. Система интегро-дифференциальных уравнений сводится к бесконечной системе дифференциальных уравнений в некотором гильбертовом пространстве H. Эта система оказывается системой уравнений Лагранжа в выбранных переменных.

2. Доказываются разрешимость в H полученной бесконечной системы, дискретность спектра и исследуется асимптотика собственных значений. Устанавливаются аналоги классических теорем аналитической механики: теоремы Томсона и теоремы Лагранжа.

3. Развитая теория применяется для изучения некоторых ударных явлений, для оценки динамических характеристик корабля, содержащего внутри себя большое количество жидкости, и к ряду других вопросов.

В. И. Моссаковский (*Днепропетровск*). **О перекатывании упругих тел.** Рассмотрена пространственная задача о перекатывании упругих тел. В основу положена схема явления, предложенная О. Рейнольдсом и заключающаяся в том, что область контакта состоит из двух частей: σ_1 — площадка сцепления, где отсутствует проскальзывание и, следовательно, скорости вошедших в соприкосновение точек поверхностей первого и второго тел одинаковы, σ_2 — площадка проскальзывания, где трение предполагается подчиняющимся закону Кулона.

Задача решена для случая, когда упругие постоянные контактирующих тел одинаковы.

В этом случае, как показал К. Коттанео, форма и размеры области контакта и закон распределения давления оказываются такими же, как и в задаче о сжатии двух тел (задача Герца).

Для касательных напряжений получена система интегральных уравнений, которая затем решена с обычно принятой в контактных задачах степенью приближения.

Для распределения касательных напряжений τ_{xz} в области контакта получены формулы:

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{\nu P}{\pi ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \quad \text{в} \quad \sigma_2,$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{\nu P}{\pi ab}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} - \frac{3}{2}\frac{\nu P - T}{\pi a^* b^*}\sqrt{1-\frac{(x-x_0)^2}{a^{*2}}-\frac{y^2}{b^{*2}}} \quad \text{в} \quad \sigma_1,$$

где a. b — полуоси площадки контакта.

Площадка сцепления τ_1 является внутренностью эллипса

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^{*2}}+\frac{y^2}{b^{*2}}=1.$$

При этом

$$\left(\frac{a^*}{a}\right)^3=\left(\frac{b^*}{b}\right)^3=\frac{\nu P - T}{\nu P} \qquad (x_0 = a - a^*),$$

P и T — соответственно прижимающая и сдвигающая силы, ν — коэффициент трения.

Х. М. Муштари (*Казань*). **Некоторые математические проблемы нелинейной теории устойчивости пологих оболочек.** Целью данного сообщения является обратить внимание математиков на некоторые математические проблемы, усиленная разработка которых необходима для современной теории устойчивости пологих оболочек и для внедрения результатов ее в расчетную практику. В сообщении дается обобщение имеющегося опыта в решении соответствующих задач теории оболочек, а также формулируются связанные с ними математические задачи, важнейшими из которых являются:

1) видоизменение метода Ритца с целью получения наилучшего приближения к собственному значению краевой задачи нелинейного функционального уравнения при помощи наименьшего числа варьируемых параметров;

2) развитие теории форм четвертой степени;

3) развитие теории малых, но конечных почти, изгибаний поверхности при весьма малых удлинениях ее;

4) применение современной вычислительной техники к решению задач теории оболочек.

В. В. Немыцкий (*Москва*). **О природе установившихся режимов в многомерных динамических системах.** При анализе действия автономных динамических систем основной задачей является разыскание устойчивых установившихся режимов и исследование переходных процессов (процессов установления). Пока изучались системы с одной степенью свободы, понятие установившегося режима было вполне ясным и не имело особого смысла его математически определять. Для систем со многими степенями свободы сама природа устойчивого установившегося режима становится не вполне ясной. В частности, неясно, насколько далеко следует идти, рассматривая установившиеся непериодические колебательные режимы. Исходя из весьма естественных предположений о природе установившихся режимов, можно доказать, что в трехмерном фазовом пространстве возможны лишь три типа устойчивых установившихся режимов: а) положение равновесия, б) периодическое колебание и в) квази-периодические движения с двумя независимыми частотами. При этом рассмотрении мы ограничиваемся лишь такими режимами, фазовые траектории которых помещаются в ограниченной области фазового пространства.

Я. Л. Нудельман (*Одесса*). **Некоторые вопросы общей теории упругой устойчивости.** Рассматривается устойчивость упругого равновесия тел произвольной формы как при малых, так и при больших деформациях.

Дифференциальные уравнения, предложенные различными авторами (Саусвеллом, Бицено и Генки, Новожиловым, Ишлинским и др.) для решения сформулированной выше задачи, принципиально отличаются друг от друга и в ряде случаев приводят к качественно и количественно противоречивым результатам. Как показывает анализ, отличие в уравнениях в одних случаях объясняется отличием в физических предпосылках, а в других случаях — произвольным отбрасыванием слагаемых при линеаризации уравнений.

Для различных задач рекомендуются дифференциальные уравнения, не приводящие к указанным противоречиям.

Для изучения устойчивости упругого равновесия составлено, вообще говоря, сингулярное интегральное уравнение, линейное относительно вариации перемещений.

В случае малых деформаций ядро этого уравнения является положительно определенным и симметричным. В случае больших деформаций ядро нелинейно зависит от параметра.

Свойства ядра определяются формой тела и теми допущениями, которыми принято пользоваться при изучении деформации таких тел. В зависимости от свойства ядра спектр критических сил может быть дискретным с бесконечной и конечными точками сгущения, а также сплошным.

М. Т. Нужин (*Казань*) **и Г. Г. Тумашев** (*Казань*). **Обратные краевые задачи и их приложения в механике.** Обратные краевые задачи представляют собою новое направление в общей теории краевых задач и относящиеся к ним основные результаты, полученные за последние 10—12 лет.

Основное отличие обратных краевых задач от обычных краевых задач состоит в том, что в обратных задачах искомыми элементами являются аналитическая функция и область ее определения, а заданными считаются значения аналитической функции на границах искомой области. Решение обратных задач дает возможность определять область, обладающую наперед заданными свойствами.

Получены следующие основные результаты по общей теории и приложениям обратных краевых задач в механике.

Найдены решения внутренней и внешней обратных краевых задач для регулярной в искомой области функции и функции, имеющей простой полюс. Исследованы при весьма общих предположениях вопросы существования и единственности решения.

Даны многочисленные приложения обратных краевых задач к важным в практическом отношении вопросам гидроаэромеханики и теории фильтрации. Почти исчерпывающее решение получили задачи о нахождении форм изолированных крыловых профилей и профилей в гидродинамических решетках, обтекаемых потенциальным потоком несжимаемой жидкости, задачи по распределению на них скоростей или давлений при различных способах задания последних. Результаты распространены на случаи потенциальных течений сжимаемой жидкости.

Исследован также вопрос о влиянии малых изменений граничных значений на решение обратной краевой задачи и рассмотрен связанный с этим вопрос о модификации крыловых профилей.

Далее, разработан метод решения задач об определении форм оснований гидротехнического сооружения по заданному распределению скоростей фильтрации.

Сделана попытка постановки задач об определении границ областей в случае неаналитических функций. Из задач подобного типа рассмотрена задача о нахождении формы стенок сопла Лаваля по распределению сверхзвуковых скоростей.

Систематическое изложение основных результатов, полученных в области обратных краевых задач, дано в монографии Г. Г. Тумашева и М. Т. Нужина «Обратные краевые задачи» (Учен. зап. КГУ, т. 115, кн. 6, 1955).

Г. И. Петрашень (*Ленинград*). **Об изучении нестационарных интерференционных явлений в средах, содержащих тонкие слои.** Рассматриваются упругие среды с плоскопараллельными границами раздела, содержащие наряду с толстыми тонкие слои. Предполагается, что в некоторый момент времени в произвольно заданной точке среды начинает действовать источник возмущений любого вида. Изучаются законы распространения волн, созданных источником, а также различные эффекты, связанные с интерференцией всех волн, отразившихся от границ тонкого слоя.

1. Исследуются процессы формирования интерференционных волн (типа волн Лява) в двуслойной и трехслойной средах, содержащих тонкие слои.

2. Изучаются особенности формирования и распространения головных (боковых) волн, возникающих в тонких слоях, с повышенной скоростью распространения волн.

3. Оценивается влияние тонких поверхностных слоев на регистрацию вступлений волн, приходящих к поверхности из глубины среды.

4. Изучаются эффекты экранирования волн двумя тонкими слоями с повышенной скоростью распространения возмущений и выясняются явления, происходящие при сближении этих слоев.

Все исследования производятся при учете реальных свойств приборов, применяемых в экспериментах.

Н. С. Пискунов (*Москва*). **О некоторых задачах подземной гидромеханики, приводящих к краевым задачам для уравнений в частных производных с переменной областью.** Показывается, что многие задачи подземной гидромеханики приводятся к решению краевых задач следующего типа: пусть в 3-мерном пространстве заданы две области D_1 и D_2 с границами S_1 и S_2. Границы S_1 и S_2 имеют общую часть σ.

В областях D_1 и D_2 требуется определить функции u_1 и u_2, которые удовлетворяют уравнению Лапласа (или Фурье) и граничным условиям типа или Дирихле, или Неймана, или их комбинации для u_1 на поверхности $S_1 - \sigma$ и для u_2 на поверхности $S_2 - \sigma$. На поверхности σ должны удовлетворяться некоторые условия типа

$$F_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial n}, \frac{\partial u_2}{\partial n}\right) = 0,$$

$$F_2(u_1, u_2) = 0.$$

Вид функций F_1 и F_2 определяется конкретными условиями (в случае уравнения Фурье добавляется начальное условие). Требуется определить перемещение точек поверхности σ с течением времени, если скорость перемещения есть функция нормальных производных

$$V_n = \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\sigma\right),$$

где V_n — скорость точек поверхности, направленная по нормали.

К таким краевым задачам приводятся задачи о вытеснении одной жидкости другой, как-то: задачи о поддержании пластового давления путем нагнетания при эксплоатации нефти (процесс растекания нагнетаемой жидкости), задачи о подземном хранении газа (форма объема, занимаемого газом) и т. д.

В качестве примера рассматривается одна конкретная задача указанного выше типа.

В. Л. Рвачев (*Осипенко*). **Расчет бесконечной балки, лежащей на упругом полупространстве.** Получено решение задачи об изгибе бесконечной балки, лежащей на упругом полупространстве и произвольно загруженной по своей длине, без гипотезы о распределения реакции основания по ширине балки. (Согласно гипотезе Г. Э. Проктора давление по ширине под балкой постоянно, а согласно гипотезе М. И. Горбунова-Посадова эпюра давлений в поперечном направлении под балкой имеет такую же форму, как и под штампом с плоским основанием в случае плоской задачи).

Найденное решение позволяет оценить состоятельность гипотез, положенных в основу приближенных решений этой же задачи различными авторами.

В. С. Рогожин (*Ростов на Дону*). **Достаточные условия однолистности решения обратных краевых задач гидромеханики.** В докладе исследуется возможность однолистной разрешимости следующих двух задач гидромеханики.

1. Определить форму подземной части гидротехнического сооружения, если вдоль нее задана в функции длины дуги скорость движения жидкости $V = f(s)$ (см. [1]).

2. Определить форму профиля в плоском потенциальном потоке несжимаемой жидкости, если вдоль него задана в функции длины дуги скорость потока $v = f(s)$ (см. [2], [3]).

Доказывается, что при выполнении некоторых условий, характеризующих гладкость функции $f(s)$, искомые контуры не будут иметь точек самопересечения.

В основу рассмотрений для задачи 2 положено следующее утверждение.

Если $f(s) = s^n (l - s) f^1(s)$, где $f(s)$ отлична от нуля и конечна для $0 \leqslant s \leqslant l$, то углы, образованные контуром подземной части сооружения с горизонталью в начальной и конечной точках, равны $\frac{\pi}{2(1+n)}$; имеет место следующее представление:

$$f(s) = f_0(s) \cos^{\frac{n}{n+1}} \frac{\pi\varphi(s)}{KH}, \tag{1}$$

где

$$\varphi(s) = \int_0^s f(s)\, ds - \frac{KH}{2} \qquad (f_0(s))$$

конечна и отлична от нуля для $0 \leqslant s \leqslant l$, K — коэффициент фильтрации, а H — напор.

На основании этого результата доказывается ряд теорем об однолистности решения. Простейшая из них относится к случаю, когда $\frac{n}{n+1} = -1$:

Если $f(s) = s(l - s) f^*(s)$, то $f(s) = f_0(s) \cos \frac{\pi\varphi(s)}{KH}$ и при выполнении условия

$$\max \left| \frac{f_0'(s)}{f_0^2(s)} \right| < \frac{\pi^2}{2KH} \tag{2}$$

решение будет однолистным.

Аналогичные результаты получены и для задачи 2.

В доказательствах использованы, наряду с известными критериями однолистности аналитических функций, также некоторые новые критерии.

Лит.: 1. Нужин М. Г., Инж. сб., XVIII, (1954). 2. Mangler W., Jahrbuch d. Luftfahrtforschung, (1938). 3. Тумашев Г. Г., Труды КАИ, в. 17, (1946).

Г. Н. Савин (*Киев*). **Некоторые задачи динамики весомой нити переменной длины.** Излагаются результаты исследования динамических усилий $T(x, t)$ и удлинений $u(x, t)$ в упруго-несовершенной нити, верхний конец которой навивается на барабан, вращающийся с заданной линейной скоростью $v(t)$ $(v(0) = 0)$ вокруг неподвижной оси с висящим на нижнем конце ее грузом Q.

Задача сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial T}{\partial x} + b\,T(0, t) = 0; \tag{1}$$

и уравнения:

а) в случае упруго-вязкой нити

$$T = K\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}; \tag{2}$$

б) в случае нити с внутренним трением гистерезисного типа

$$T = K\left[1 + i\frac{\chi}{2\pi}\right]\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (i = \sqrt{-1}); \tag{3}$$

в) для нити, обладающей релаксацией и последействием

$$T + n\frac{dT}{dt} = K\frac{\partial u}{\partial x} + nN\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \tag{4}$$

где a, b, K, α, n, N и χ — постоянные; первые две зависят от собственного веса нити и груза Q, остальные постоянные характеризуют физико-механические свойства материала нити.

Функция $u(x, t)$ должна удовлетворять следующим начальным (5) и граничным (6) и (7) условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= m_1 x + m_2 x^2, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} &= m_3 x, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$u(0, t) = 0 \tag{6}$$

на нижнем конце и переменным условиям

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=l(t)}\right]\frac{dl}{dt} = v(t); \tag{7}$$

на верхнем конце нити, где m_1 и m_2 — постоянные, $l(t)$ — недеформированная длина нити в момент времени t. Условие (7) выражает отсутствие скольжений нити при набегании ее на барабан.

Г. С. Салехов (*Казань*). **Краевые задачи, допускающие данное решение.** Дано дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных в области $G \subset (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ как функция параметров $\{\alpha_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, M)$

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ u, u_1, u_2, \ldots, u_n;\ u_{11}, u_{12}, \ldots, u_{nn};\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_M) = 0, \tag{1}$$

где u — неизвестная функция $u_j = \dfrac{\partial u}{\partial x_j}$, $u_{jl} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_l}$. Пусть уравнение (1) определено для значений параметров, лежащих в области $G_\alpha \subset (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, и удовлетворяет в областях $G_i \subset G$ не более $(n-1)$ измерений краевым условиям

$$K_i(x_1, x_2, \ldots, x_n;\ u, u_1, u_2, \ldots, u_n;\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N) = q \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (2)$$

где $\left\{\beta_{s_i}^{(i)}\right\}$ — конечное число параметров, принадлежащих областям $G_{\beta_i}^{(i)}$. Области G_α и $G_\beta^{(i)}$ могут перекрываться частично или полностью.

Будем предполагать, что задача определения функции u при вышеуказанных условиях поставлена корректно.

Обратная задача может быть поставлена следующим образом.

Требуется определить такие значения параметров $\{\alpha_k\}$, $\left\{\beta_{s_i}^{(i)}\right\}$ соответственно в областях G_α, $G_\beta^{(i)}$, чтобы заданная в G функция $v(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяла уравнению (1) и краевым условиям (2) наилучшим образом согласно принятой норме оценки погрешности.

Для нахождения $\{\alpha_k\}$, $\{\beta_{si}^{(i)}\}$ применяются различные методы минимальной погрешности. С помощью этих методов из семейства краевых задач, содержащего произвольные параметры в основном уравнении (1) и в краевых условиях (2), выбирается та задача, которая допускает данное решение v. Вводится понятие корректности постановки обратной в вышеуказанном смысле краевой задачи. Математическое изучение различных явлений в физике, механике и других областях приводит к краевым задачам. Обычно в основные уравнения или в краевые условия (или в те и другие вместе) входят независимые физические параметры.

Часто представляется важным выяснить, может ли быть реализовано желаемое решение (и если да, то насколько точно) при вариации поддающихся регулированию параметров в допустимых пределах. С этой точки зрения краевые задачи, допускающие данное решение, можно рассматривать как задачи управления различными процессами.

Важным примером краевой задачи, допускающей данное решение, является проблема управления движением контура нефтеносности в нефтяном пласте.

Задача заключается в выборе таких дебитов нефтяных скважин и темпов закачки воды в нагнетательные скважины, а также такого расположения скважин, которые обеспечили бы желаемый закон продвижения контура нефтеносности. Этот закон должен выбираться таким, чтобы предотвратить преждевременное обводнение нефтяных скважин.

Л. И. Седов (*Москва*). **Методы подобия в нелинейной механике сплошной среды.** О физических постановках задач, приводящихся к определению автомодельных решений. Обзор некоторых приложений к различным областям механики. Встречающиеся трудности в краевых задачах и еще не решенные автомодельные задачи. Об интегралах системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих автомодельные процессы. Особые решения, необходимые для формулировки начальных данных Коши для некоторых задач. Примеры из газовой динамики.

Приложения к теории турбулентности.

М. Н. Тихов (*Харьков*). **О притоке жидкости в цилиндрическом пласте к перфорированной центральной скважине.** Для случая установившегося движения без свободной поверхности тяжелой несжимаемой жидкости постоянной вязкости в неизменяемой пористой среде при строгом соблюдении закона Дарси во всем пласте задача приводится к решению уравнения Лапласа для потенциальной функции Φ при смешанных граничных условиях, заданных на границе соответственно выбранной трехразмерной области. Если считать, что перфорации имеют прямоугольную форму и расположены по стволу цилиндрической скважины равномерно на двух противоположных образующих, то в качестве указанной области возможно выбрать область, приходящуюся на $\frac{1}{4}$ часть одного отверстия, в форме квадранта соответствующей цилиндрической секции пласта. При использовании цилиндрических координат граничные условия задачи примут вид:

$$\frac{\partial \Phi^{*}(r, \varphi, l)}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial \Phi(r, \varphi, 0)}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial \Phi(r, 0, z)}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial \Phi\left(r, \frac{\pi}{2}, z\right)}{\partial \varphi}=0, \quad \frac{\partial \Phi(R_c, \varphi, z)}{\partial z}=F(\varphi, z), \quad \Phi(R_0, \varphi, z)=\Phi_0,$$

$$F(\varphi, z)=\begin{cases} 0 \text{ для } \varphi_a \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, & 0 \leqslant z \leqslant l \\ 0 \text{ для } 0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_a, & a \leqslant z \leqslant l \\ v_c \text{ для } 0 \leqslant \varphi < \varphi_a, & 0 \leqslant z < a, \end{cases}$$

где R_c, R_0, l, φ_a, a — величины, характеризующие геометрические размеры секции пласта, скважины и перфорации, v_c — неизвестная постоянная (скорость фильтрации на поверхности отверстия), которая определяется в среднем из дополнительного условия

$$\frac{1}{a\varphi_a}\int_0^a\int_0^{\varphi_a} \Phi(R_c, \varphi, z)\, d\varphi dz=\Phi_c,$$

причем величины Φ_0 и Φ_c заданы.

Решая эту задачу методом Фурье—Ламе, мы получаем следующие основные результаты:

1. Устанавливаются условия в виде неравенств, при которых решение задачи имеет физический смысл.

2. Выводится формула для дебита перфорированной скважины, из которой получается следствие: если линейные размеры пласта представляют собой величину, несравнимо большую относительно размеров диаметра скважины, как это бывает в естественных нефтяных пластах, то увеличение числа перфорационных отверстий, начиная с некоторого весьма незначительного предела, не может оказывать значительного количественного эффекта на величину дебита скважины.

Я. С. Уфлянд (*Ленинград*). **О решении одной смешанной задачи теории упругости для полупространства.** С помощью интегрального преобразования Мелера—Фока дано решение задачи о нахождении двух гармонических в полупространстве $z \geqslant 0$ функций f и φ при следующих условиях: на плоскости $z=0$ внутри круга заданы линейные комбинации $f+a\varphi$ и $\frac{\partial f}{\partial z}+b\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, а вне круга — другие комбинации: $f+\alpha\varphi$ и $\frac{\partial f}{\partial z}+\beta\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, где a, b, α, β — постоянные. К такой краевой задаче, в частности, сводится задача о давлении кругового в плане, жесткого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления.

Ф. И. Франкль (*Москва*). **Дозвуковые течения с местными сверхзвуковыми зонами.** В течение длительного времени не удавалось построить пример течения с конечной сверхзвуковой областью, оканчивающейся скачком уплотнения и примыкающей только к одной стенке.

В работе 1955 г. автор дал такой пример, который представляется простой формулой

$$\psi=\text{const}\,(\eta^4-6\theta^2\eta),$$

где ψ — функция тока, η — функция модуля скорости и Θ — угол наклона скорости. Сверхзвуковая зона в этом случае оканчивается вниз по течению прямым скачком уплотнения.

Пример основан на применении метода годографа Моленбрука—Чаплыгина в сочетании с теорией уравнений в частных производных смешанного типа, разработка которой была начата Ф. Трикоми; эта теория применяется к уравнению

$$\eta \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} = 0.$$

В дальнейшей работе автор сформулировал краевую задачу, дающую возможность построить обтекание профиля плоскопараллельным потоком дозвуковой скорости в бесконечности со сверхзвуковой зоной указанного вида. Краевая задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

При этом учитываются условия на скачке уплотнения, в отличие от работ некоторых других авторов (Коул, Триллинг, Уокер), где эти условия не учитываются.

З. И. Халилов (*Баку*). **Решение основной математической задачи фильтрации газированной нефти.** 1. Фильтрация газированной нефти описывается системой двух нелинейных уравнений относительно давления p и насыщенности ρ (отношения объема жидкости к объему пор). Для давления даны граничные и начальные условия, а для насыщенности дано только начальное условие. Задачи ставятся в одномерном, двумерном и трехмерном пространствах.

2. В связи с этим рассматривается следующая общая краевая задача: найти пару функций u и v, удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u, u_x, u_t, v, v_x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g(x, t, u, u_x, u_t, v, v_x)$$

и условиям

$$u\,|_{x=a} = u_a(t), \qquad u\,|_{x=b} = u_b(t),$$

$$u\,|_{t=0} = u_0(x), \qquad v\,|_{t=0} = v_0(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T$$

(для простоты рассматривается одномерная задача).

3. Для решения указанной задачи при определенных условиях применяется метод последовательных приближений по следующим двум схемам:

$$\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = f_1\left(x, t, u^{(n-1)}, u_x^{(n-1)}, u_t^{(n-1)}, v^{(n-1)}, v_x^{(n-1)}\right),$$

$$\frac{\partial v^{(n)}}{\partial t} = g\left(x, t, u^{(n-1)}, u_x^{(n-1)}, u_t^{(n-1)}, v^{(n-1)}, v_x^{(n-1)}\right),$$

$$u^{(n)}\,|_{x=a} = u_a(t), \qquad u^{(n)}\,|_{x=b} = u_b(t), \qquad u^{(n)}\,|_{t=0} = u_0(x), \; v^{(n)}\,|_{t=0} = v_0(x)$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

где $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ подбираются определенным образом:

$$\frac{\partial^2 u^{(n)}}{\partial x^2} - \frac{\partial u^{(n)}}{\partial t} = f_2\left(x, t, u^{(n)}, u_x^{(n)}, u_t^{(n)}, v^{(n-1)}, v_x^{(n-)}\right),$$

$$\frac{\partial v^{(n-1)}}{\partial t} = g\left(x, t, u^{(n-1)}, u_x^{(n-1)}, u_t^{(n-1)}, v^{(n-1)}, v_x^{(n-1)}\right) \qquad \left(u^{(0)} \equiv u_0(x)\right),$$

$$u^{(n)}\,|_{x=a} = u_a(t), \qquad u^{(n)}\,|_{x=b} = u_b(t), \qquad u^{(n)}\,|_{t=0} = u_0(x), \qquad v^{(n-1)}\,|_{t=0} = v_0(x)$$

$$(n = 1, 2, \ldots);$$

f_1 и f_2 — функции, определяемые функцией f.

4. Результаты п. 3 уточняются для системы уравнений фильтрации газированной жидкости (нефти).

И. А. Чарный (*Москва*). **Об одном интегральном соотношении теории фильтрации и некоторых его приложениях.** 1. Для стационарного плоского фильтрационного потока на плоскости xoz между непроницаемыми границами с уравнениями $h_1(x)$ и $h_2(x)$ имеет место интегральное соотношение

$$q\,(x_2 - x_1) = \int\limits_{h_1(x_1)}^{h_2(x_1)} \Phi\,(x_1, z)\,dz - \int\limits_{h_1(x_2)}^{h_2(x_2)} \Phi\,(x_2, z)\,dz + \int\limits_{h_2(x_1)}^{h_2(x_2)} \Phi\,[x, h_2\,(x)]\,dh_2 -$$

$$- \int\limits_{h_1(x_1)}^{h_1(x_2)} \Phi\,[x, h_1\,(x)]\,dh_1\,, \tag{1}$$

где $\Phi\,(x_2, z)$ — фильтрационный потенциал, $q = -\int\limits_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dz$ — фильтрационный расход, $\Phi\,(x_1, z)$, $\Phi\,(x_2, z)$ — фильтрационные потенциалы в сечениях x_1, x_2.

2. Аналогичное соотношение получается для осесимметричного притока к скважине в тех же условиях заменой x на $\ln r$.

3. С помощью соотношения (1) получены следующие результаты:

1) доказана правильность формул Дюпюи для фильтрационного расхода через прямоугольную проницаемую перемычку на непроницаемом горизонтальном основании и для безнапорного притока к совершенной скважине;

2) дано обобщение формул Дюпюи для грунта с переменной вдоль вертикали проницаемостью;

3) метод расчета горизонтальной проекции сдвигающей силы, действующей на подземный контур гидротехнического сооружения со стороны грунтового потока по известным распределениям напоров в двух сечениях и фильтрационному расходу;

4) метод определения пределов, между которыми заключен максимальный безводный дебит нефтяной скважины в пласте с подошвенной водой.

Г. Г. Черный (*Москва*). **Адиабатические движения совершенного газа с ударными волнами большой интенсивности.** 1. Пусть в некотором слое газа плотность его значительно выше плотности газа в остальной области движения. Введем для измерения плотности ρ внутри слоя новый масштаб, полагая $\rho = \frac{\rho'}{\varepsilon}$, где малая величина ε такова, что ρ' имеет тот же порядок величины, что и плотность вне слоя. Заменив в уравнениях движения ρ величиной $\frac{\rho'}{\varepsilon}$, будем искать решение уравнений в виде рядов по степеням ε. Этот метод отыскания решения по идее аналогичен методу Мизеса получения уравнений теории пограничного слоя из уравнений движения вязкой жидкости путем представления решения в виде рядов по степеням $\frac{1}{\mathrm{Re}}$, где Re — число Рейнольдса (уравнения теории пограничного слоя определяют первые члены этих рядов).

2. Будем рассматривать движения совершенного газа, зависящие от двух переменных. В случае неустановившихся одномерных движений за независимые переменные примем выбранные специальным образом лагранжевы переменные, в случае установившихся плоских или осесимметричных движений за одну из независимых переменных удобно взять функцию тока. В таких переменных последовательные члены рядов по степеням ε выражаются простыми формулами, содержащими произвольные функции. Задачи об отыскании движения газа сводятся к нахождению этих произвольных функций из граничных и начальных условий.

3. К течениям рассматриваемого вида относятся течения совершенного газа с ударными волнами большой интенсивности, в которых происходит значительное уплотнение газа. Для очень сильных волн отношение плотностей газа за волной и перед ней определяется величиной $\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$ (γ — отношение теплоемкостей; для воздуха $\gamma = 1{,}4$).

Поэтому для расчета течений за ударными волнами большой интенсивности решение можно представлять в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$.

4. Для оценки точности и пределов применимости метода произведено сравнение полученных с его помощью результатов (ограничиваясь членами, линейными по ε) с точными решениями ряда задач об автомодельных движениях газа: задачи о поршне, движущемся с постоянной скоростью (Седов, Тейлор), задачи об ускоренно или замедленно движущемся поршне (Крашенниникова), задачи о сильном точечном взрыве (Седов, Тейлор), задачи об обтекании клина и конуса (Тейлор и Маккол). Решения всех этих задач предлагаемым методом получаются в элементарном виде и весьма хорошо согласуются с точными решениями даже при $\gamma = 1{,}4$ (т. е. при $\varepsilon = \frac{1}{6}$).

5. В качестве примеров решения новых задач получено решение задачи о неавтомодельных движениях газа при расширении сферического и цилиндрического поршней с постоянной скоростью и с начальным радиусом, не равным нулю, и решение практически важной задачи об установившемся обтекании потоком с большой сверхзвуковой скоростью тела вращения в виде усеченного конуса с протоком.

Дано также новое решение задачи о точечном взрыве с учетом противодавления, получавшееся ранее путем сложных и весьма трудоемких численных расчетов (Бурнова, Сакураи, Нейманн и др.).

Г. С. Шапиро (*Москва*). **Применение разрывных решений в теории пластичности.** В докладе рассмотрены следующие вопросы.

Сильные и слабые разрывы. Классификация Прагера.

Упруго-пластические динамические задачи. Задача о распространении волны разгрузки как смешанная задача теории квазилинейных гиперболических уравнений. Методы ее решения. Случай плоских волн.

Задача жестко-пластического анализа. Задача обработки давлением. Задачи статики сыпучей среды. Предельное равновесие пластинок и оболочек. Динамическая задача.

Д. И. Шерман (*Москва*). **Эффективные методы интегральных уравнений в применении к некоторым задачам теории упругости.** Дается эффективный метод решения некоторого класса задач кручения, изгиба и плоской теории упругости для неодносвязных областей. Практически небезинтересно, что метод остается эффективным и в случае, когда границы области достаточно близки одна к другой.

СЕКЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ ФИЗИКИ

М. Г. Белкина (*Москва*). **Диффракция электромагнитных волн на эллипсоиде вращения и диске.** Методом разделения переменных в сфероидальной системе координат решены следующие электродинамические задачи.

1. Диффракция на вытянутом или сплюснутом идеально проводящем эллипсоиде вращения, возбуждаемом электрическим диполем, находящимся на оси эллипсоида и имеющим момент, направленный вдоль оси. Расстояние диполя от эллипсоида — произвольное. В пределе получается решение задачи о вертикальном электрическом диполе на оси диска.

2. Диффракция на идеально проводящем круглом диске, на оси которого, на произвольном расстоянии от диска, находится магнитный диполь с моментом, параллельным диску. Решение этой задачи получено с помощью новых потенциалов. В предельном случае диполя, бесконечно удаленного от диска, получено решение задачи о плоской волне, нормально падающей на диск. В случае, когда диполь находится на самом диске, получено решение задачи об односторонней щели на диске.

Произведен ряд вычислений, в частности, сравнение результатов по строгой теории диффракции для плоской волны, нормально падающей на диск, с приближенной теорией (по «принципу Гюйгенса»).

В. Г. Болтянский (*Москва*), **Л. С. Понтрягин** (*Москва*). **Об устойчивости положения равновесия «релейной» системы обыкновенных дифференциальных уравнений.** Рассматривается вопрос об устойчивости положения равновесия системы

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + k_i f(x_1) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

где $f(x_1) = \operatorname{sign} x_1$, а величины a_{ij}, k_i постоянны. Поведение системы вблизи плоскости $x_1 = 0$ рассматривается как предельное (при $N \to \infty$) для системы (1), в которой $f(x_1)$ есть следующая функция:

$$f(x_1) = -1 \quad \text{при} \quad x_1 \leqslant -\frac{1}{N},$$

$$f(x_1) = Nx_1 \quad \text{при} \quad -\frac{1}{N} \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{N},$$

$$f(x_1) = +1 \quad \text{при} \quad x_1 \geqslant \frac{1}{N}.$$

Благодаря этому в системе возможны «скользящие режимы» (при $K_1 \neq 0$).

Система (1) формально сводится к следующему уравнению (в операторной форме):

$$K(p)\, x_1 = L(p) \sin x_1,$$

где K — многочлен степени n, а L — многочлен степени $m \leqslant n - 1$. Устанавливается что при $m \leqslant n - 3$ положение равновесия $(0, \ldots, 0)$ системы (1) всегда неустойчиво, а при $m=n-1$ или $m=n-2$ возможна устойчивость. Получены условия (на коэффициенты), при которых положение равновесия будет устойчивым; выведены также некоторые количественные оценки для переходных процессов.

В. Г. Болтянский (*Москва*), **Р. В. Гамкрелидзе** (*Москва*), **Л. С. Понтрягин** (*Москва*). **К теории оптимальных процессов.** 1. Пусть задана система уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n;\ u^1, \ldots, u^r) \qquad (i = 1, \ldots, u),$$

где $u^j(t)$ — искомые функции времени, которые предполагаются кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими; кроме того, точка с координатами $u^1, \ldots, u^r$ предполагается лежащей в некоторой фиксированной замкнутой области r-мерного пространства. Функции $u^j(t)$ требуется подобрать таким образом, чтобы точка в фазовом пространстве $x^1, \ldots, x^n$, выйдя из положения $(a^1, \ldots, a^n)$ в момент $t=t_0$, двигалась по оптимальной траектории.

2. Все оптимальные траектории, соответствующие заданному начальному условию, определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n;\ u^1, \ldots, u^r) \qquad (i = 1, \ldots, n), \\ \dot{\psi}_i = -\sum\limits_{\alpha=1}^{n} \dfrac{\partial f^\alpha}{\partial x_j} \psi_\alpha \qquad (i = 1, \ldots, n), \\ \sum\limits_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(x^1, \ldots, x^n,\ u^1, \ldots, u^r) = \max\ (\text{по } u^j), \end{cases}$$

причем предполагается, что максимум $\sum\limits_{\alpha=1}^{n} \psi_\alpha f^\alpha(x, u)$ существует.

В. Л. Бонч-Бруевич (*Москва*). **Об одной задаче квантовой теории многих тел.** Метод функции Грина, развитый в связи с задачами квантовой теории поля, может быть непосредственно перенесен в нерелятивистскую квантовую теорию многих тел. Этот метод позволяет определить матрицу плотности в основном состоянии системы, а также спектр элементарных возбуждений, определяющих малые отклонения энергии от основного состояния.

Метод функционального усреднения позволяет использовать для вычисления квантовой функции Грина принципиально новые методы аппроксимации, выходящие за рамки обычной теории возмущений.

В докладе излагается метод аппроксимации, основанный на приближенном решении уравнений для функции Грина в классическом внешнем поле (последнее считается медленно меняющимся). Метод применяется для рассмотрения задачи о сильно вырожденном неидеальном ферми-газе. Показывается, что при учете взаимодействия (вне рамок стандартной теории возмущений) функция распределения электронов по импульсам в основном состоянии не носит чисто ступенчатого характера. Это означает, что в рассматриваемой системе при абсолютном нуле имеются носители тока с импульсами, превышающими граничный импульс Ферми. Исследован также спектр элементарных возбуждений в данной системе.

В. С. Владимиров (*Москва*). **Об одном интегро-дифференциальном уравнении.** Изучается линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$L\varphi = \lambda b(P)\, S\varphi + F(s, P), \tag{1}$$

где

$$L\varphi = \frac{1}{a(P)} \sum_{i=1}^{n} s_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \varphi, \qquad S\varphi = \int\limits_{\Omega} \varphi(s, P)\, ds.$$

Неизвестная функция $\varphi(s, P)$ зависит от точки $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ конечной области G

n-мерного эвклидова пространства R_n и от точки $s=\left(s_1, s_2, \ldots, s_n, \sum s_i^2=1\right)$ сферической поверхности Ω в R_n единичного радиуса. Граница Γ области G предполагается кусочно-гладкой. Для выпуклой области G уравнению (1) сопутствует граничное условие

$$\varphi(s, P)=0, \quad P \in \Gamma, \quad (s, n_P)<0, \tag{2}$$

где n_P — вектор внешней нормали к границе Γ в точке P. Для невыпуклой области G граничные условия усложняются.

Сформулированная задача (1), (2) возникает при изучении процессов переноса.

Предполагаем, что функции a и b в уравнении (1) измеримы, почти всюду положительны и ограничены в G; функция F принадлежит гильбертову пространству $\mathfrak{H}$ с нормой

$$\|F\|_{\mathfrak{H}}^2=\int_\Omega\int_G a(P) F^2(s, P)\, ds dP.$$

Определяется область задания оператора L: линейное множество функций D, плотное в $\mathfrak{H}$. Доказывается существование и единственность решения задачи (1), (2) в D, а также непрерывная зависимость от a, b и F в $\mathfrak{H}$.

Назовем регулярными те значения параметра λ, при которых оператор $(L-\lambda bS)^{-1}$ существует и ограничен в $\mathfrak{H}$. Все остальные λ отнесем к точкам спектра задачи (1), (2). Доказывается, что спектр состоит из собственных чисел λ_k, $k=1, 2, \ldots$, и из $+\infty$; числа λ_k — положительные, каждое имеет конечную кратность.

Собственную функцию, соответствующую собственному значению λ_k, обозначим через φ_k. Доказано: собственное число λ_1 — простое, а собственная функция $\varphi_1(s, P)$ почти всюду положительна; система функций $n_k=S\varphi_k$ ортогональна и полна в гильбертовом пространстве H-функций, суммируемых с квадратом по весу ab на G.

Устанавливается вариационный принцип, связанный с задачей (1), (2). Например, для задачи на собственные значения в случае выпуклой области G максимально-минимальный принцип Куранта имеет вид

$$\lambda_k=\sup_{\psi_i \in \mathfrak{H}} \inf_{\substack{u \in D_0 \\ (Su,\, S\psi_i)_H=0 \\ i=1,\, 2,\, \ldots,\, k-1}} \frac{\int_\Omega\int_\Gamma (s, n_P)\,|\, u^2(s, P)\, ds d\Gamma(P)+\left\|\frac{1}{a} \sum_{i=1}^n s_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{\mathfrak{H}}^2+\|u\|_{\mathfrak{H}}^2}{\|Su\|_H^2}. \tag{3}$$

Множество функций сравнения D_0 состоит из таких функций u, для которых существуют интегралы, входящие в числитель функционала (3), и функция $\frac{1}{a(P)} \sum_{i=1}^n s_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ абсолютно непрерывна вдоль почти всех отрезков прямых, пересекающих область G. При этом не требуется удовлетворения граничным условиям, которые, таким образом, оказываются естественными. Минимум функционала (3) реализует функция

$$u_k(s, P)=\varphi_k(s, P)+\varphi_k(-s, P).$$

В. М. Волосов (*Москва*). **Об асимптотическом поведении решений некоторых дифференциальных уравнений нелинейных колебаний.**

1. Рассматриваются уравнения

$$\frac{1}{at}[m(\mu t)\,\dot{x}]+\mu f_1(\mu t, x, \dot{x})+\mu^2 f_2(\mu t, x, \dot{x})+\ldots+$$
$$+\mu^n f_n(\mu t, x, \dot{x})+Q(\mu t, x)=0,$$

где μ — малый параметр.

2. При условии $\operatorname{sign} Q = \operatorname{sign} x$ исследуется амплитуда колеблющегося решения и выводятся уравнения для приближений амплитуды.

3. Рассматриваются некоторые частные случаи и дается физическая интерпретация результатов, связанных с теорией адиабатических инвариантов.

4. Указывается связь развитых методов с другими асимптотическими методами (ВБК-методом и методом Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова).

В. Б. Гласко (*Москва*). **О зависимости собственных значений и собственных функций некоторых краевых задач от малого параметра.** 1. Функция источника краевой задачи

$$L(y) \equiv \mu \frac{d^2}{dx^2}\left(p_2 \frac{d^2y}{dx^2}\right) - \frac{d}{dx}\left(p_1 \frac{dy}{dx}\right) + p_0 y = f,$$

$$y(x_1) = y(x_2) = 0, \qquad y^{(\sigma)}(x_1) = y^{(\sigma)}(x_2) = 0,$$

(где $\sigma = 1$, либо 2, в зависимости от типа задачи, $p_2(x)$, $p_1(x)$, $p_0(x)$ — знакоположительные функции, удовлетворяющие некоторым условиям дифференцируемости) может быть представлена в виде

$$G(x, \xi, \mu), = G_0(x, \xi) + \mu^{\frac{\sigma}{2}} \Phi(x, \xi, \mu) + \mu^{\frac{\sigma+1}{2}} \Omega(x, \xi, \mu),$$

где $\Phi(x, \xi, \mu)$, $\Omega(x, \xi, \mu)$ — функции источника $O(1)$ относительно μ, $G_0(x, \xi)$ — функция источника вырожденной задачи (при $\mu = 0$).

2. Собственные значения и собственные функции краевой задачи $L(y) = \lambda\rho y$ $y(x_1) = y(x_2) = 0$, $y^{(\sigma)}(x_1) = y^{(\sigma)}(x_2) = 0$ имеют своим пределом при $\mu \to 0$ собственные значения и соответственно собственные функции так называемой вырожденной задачи:

$$L_0(u) \equiv -\left(p_1 \frac{d}{dx}\frac{du}{dx}\right) + p_0 u = \lambda^{(0)}\rho u, \qquad u(x_1) = u(x_2) = 0.$$

3. При малых значениях параметра μ собственные значения и собственные функции рассмотренной задачи могут быть представлены в виде

$$\lambda_m = \lambda_m^{(0)} + \mu^{\frac{\sigma}{2}} \Delta_m + \mu^{\frac{\sigma+1}{2}} O(1),$$

$$y_m(x, \mu) = u_m(x) + \mu^{\frac{\sigma}{2}} \left\{\overline{u}_m(x) + \sum_{s=1}^{2} H_s(x)\, e^{-\frac{\vartheta_s(x)}{\sqrt{\mu}}}\right\} + \mu^{\frac{\sigma+1}{2}} O(s),$$

где Δ_m, $\overline{u}_m(x)$ и т. д. — точно вычисляемые через собственные функции и собственные значения вырожденной задачи величины.

4. Формулированные результаты имеют силу и для уравнения с разрывными, но ограниченными коэффициентами.

А. С. Горяинов (*Москва*). **Диффракция электромагнитных волн на бесконечном цилиндре.** Доклад посвящен теории диффракции плоской электромагнитной волны, падающей под произвольным углом на бесконечно длинный идеально проводящий круглый цилиндр, радиус которого a не превышает длины волны λ.

Проведено асимптотическое суммирование рядов строгого решения для плотности тока методом, изложенным в фундаментальной работе В. А. Фока «Диффракция радиоволн вокруг земной поверхности». Получены формулы, удобные для численных расчетов.

Полученные выражения для тока применены при вычислении квадратурами диаграмм рассеяния на цилиндре. Эти диаграммы выражаются через функции, введенные ранее в работах В. А. Фока; приведены графики этих функций.

Произведено сравнение полученных приближенных формул со строгими формулами для бесконечного цилиндра, причем показано, что при $ka \geqslant 5$ $\left(k = \frac{2\pi}{\lambda}\right.$ — волновое число) получается удовлетворительное согласие, быстро улучшающееся при возрастании ka.

Г. Е. Кузмак (*Москва*). **Асимптотические решения некоторых нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами.** I. Рассматривается уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a(\tau)\,y + b(\tau)\,y^3 = 0 \qquad (\tau = \varepsilon t), \tag{1}$$

где ε — малый параметр.

Необходимо найти функцию $y_0(t)$ такую, что при $t \in [0, T(\varepsilon)]$ (где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon) = \infty$)

$$|y(t) - y_0(t)| < \text{const}\ \varepsilon.$$

II. Для разыскания асимптотического представления решения $y(t)$ рассматривается как функция двух переменных τ и ω;

$$y = y(\tau, \omega), \tag{2}$$

где

$$\frac{d\tau}{dt} = \varepsilon, \qquad \frac{d\omega}{dt} = \varphi(\tau). \tag{3}$$

С учетом (2) и (3) уравнение (1) принимает вид:

$$\varphi^2\frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2} + \varepsilon\left(2\varphi\frac{\partial^2 y}{\partial\omega\partial\tau} + \varphi'\frac{\partial y}{\partial\omega}\right) + \varepsilon^2\frac{\partial^2 y}{\partial\tau^2} + a(\tau)\,y + b(\tau)\,y^3 = 0.$$

Это уравнение содержит явно малый параметр, поэтому его решение разыскивается в виде

$$y(\tau, \omega) = y_0(\tau, \omega) + \varepsilon y_1(\tau, \omega) + \ldots . \tag{4}$$

Такой подход может быть использован и при рассмотрении уравнений более общего вида:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F(\tau, y) = 0.$$

III. Для функций $y_0(\tau, \omega)$ и $y_1(\tau, \omega)$ получаются уравнения

$$\varphi^2(\tau)\frac{\partial^2 y_0}{\partial\omega^2} + a(\tau)\,y_0 + b(\tau)\,y_0^3 = 0, \tag{5}$$

$$\varphi^2(\tau)\frac{\partial^2 y_1}{\partial\omega^2} + [a(\tau) + 3b(\tau)\,y_0^2(\tau, \omega)]\,y_1 = -2\varphi(\tau)\,\frac{\partial^2 y_0}{\partial\omega\partial\tau} - \varphi'(\tau)\frac{\partial y_0}{\partial\omega}.$$

Функция $y_0(\tau, \omega)$ ищется в виде

$$y_0(\tau, \omega) = A(\tau)\,\mathrm{sn}\,[T(\tau)\,\omega_1 \nu(\tau)]. \tag{6}$$

Здесь через ν обозначен квадрат модуля.

Подстановка (6) в первое из уравнений (5) дает два соотношения для четырех неизвестных функций $A(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $T(\tau)$ и $\nu(\tau)$:

$$\varphi^2(\tau)\,T^2(\tau)\,[1 + \nu(\tau)] = a(\tau),$$

$$\varphi^2(\tau)\,T^2(\tau)\cdot 2\nu(\tau) = -b(\tau)\,A^2(\tau). \tag{7}$$

Недостающие два соотношения получаются при решении второго уравнения системы (5) из условия, что функция $y_1(\tau, \omega)$ должна быть периодичной по ω, с периодом, не зависящим от τ.

Эти соотношения имеют вид:

$$\begin{gathered} T(\tau) = K[\nu(\tau)], \\ A^2(\tau)\cdot\varphi(\tau)\cdot T(\tau)\cdot L[\nu(\tau)] = B, \end{gathered} \tag{8}$$

где

$$K(\nu) = \int\limits_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\nu\xi^2)}}, \qquad L(\nu) = \int\limits_0^1 \sqrt{(1-\xi^2)(1-\nu\xi^2)}\, d\xi.$$

Функция $y_1(\tau, \omega)$ определяется в форме

$$y_1(\tau, \omega) = \frac{A(\tau)\cdot\nu'(\tau)}{\varphi(\tau)\cdot T(\tau)}\cdot G[\nu(\tau), \omega].$$

Приведем выражение для $G(\nu, \omega)$ при $\nu = 0$:

$$G(\nu, \omega)\,|_{\nu=0} = -\frac{3}{64}\left(\cos\frac{\pi}{2}\,\omega - \cos\frac{3}{2}\,\pi\omega\right).$$

IV. Из соотношений (7) и (8) для $\nu(\tau)$ получается уравнение

$$\frac{4\nu^2 L^2(\nu)}{(1+\nu)^3} = \frac{B^2 b^2(\tau)}{a^3(\tau)} \quad (\operatorname{sing}\nu = -\operatorname{sing} b). \tag{9}$$

После того, как $\nu(\tau)$ известно, могут быть вычислены амплитуда колебания $A(\tau)$ и мгновенный период $\theta(\tau)$:

$$A(\tau) = \left[\frac{1+\nu(\tau)}{a(\tau)}\right]^{\frac{1}{4}}\cdot\left[\frac{B}{L(\nu(\tau))}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\theta(\tau) = 4K[\nu(\tau)]\cdot\left[\frac{1+\nu(\tau)}{a(\tau)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

В случае, когда $a(\tau) > 0$, $b(\tau) < 0$, возможна потеря устойчивости.

Условие устойчивости имеет вид:

$$\frac{B\left(y\Big|_{t=0}, \ \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0}\right)\cdot b(\tau)}{a(\tau)^{\frac{3}{2}}} < \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

V. В работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если функции $a(\tau)$ и $b(\tau)$ таковы, что функции $\nu(\tau)$, $A(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ определяются так, что при $\tau \in [0, T_0]$:

а) функции $\nu(\tau)$, $\varphi(\tau)$, $A(\tau)$ и $\rho(\tau) = \dfrac{A(\tau)\cdot\nu'(\tau)}{\varphi(\tau)\cdot T(\tau)}$ ограничены вместе со своими первыми и вторыми производными;

б) $1 - Q^2 \leqslant \nu(\tau) \leqslant 1 - q^2$ (здесь q — сколь угодно малое, а Q — сколь угодно большое число), то функция

$$\bar{y}(t) = y_0(\tau, \omega(t)) + \varepsilon y_1(\tau, \omega(t)) \quad \text{при } t \in \left[0, T_0/\varepsilon\right]$$

удовлетворяет уравнению (1) с точностью до членов порядка ε^2.

Теорема 2. Если выполняются условия теоремы 1, то при $t \in [0, T(\varepsilon)]$ $\left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T(\varepsilon) = \infty\right)$ имеет место неравенство

$$|y(t) - y_0(t)| < \text{const}\cdot\varepsilon,$$

где

$$y_0(t) = y_0(\tau, \omega(t)).$$

VI. Метод, использованный в работе, при некоторых ограничениях, накладываемых на функцию $f\left(\tau, y, \dfrac{dy}{dt}\right)$, пригоден для нахождения асимптотических решений уравнений следующего вида:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a(\tau)\,y + b(\tau)\,y^3 = \varepsilon f\left(\tau, y, \frac{dy}{dt}\right).$$

Ниже приводятся результаты, полученные для случая

$$f\left(\tau,\ y,\ \frac{dy}{dt}\right)=[\alpha(\tau)+\beta(\tau)\,y^2]\,\frac{dy}{dt}\ .$$

Главный член асимптотического разложения

$$y_0=A(\tau)\operatorname{sn}[K(\nu)\,\omega(t),\ \nu(\tau)].$$

Уравнение для модуля:

$$\frac{d\nu}{d\tau}=\Phi(\nu,\ \tau).$$

Формула для амплитуды;

$$A(\tau)=\left\{-\frac{a(\tau)}{b(\tau)}\,\frac{2\,\nu(\tau)}{[1+\nu(\tau)]}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{11}$$

Формула для мгновенного периода:

$$\theta(\tau)=4\cdot K[\nu(\tau)]\cdot\left[\frac{1+\nu(\tau)}{a(\tau)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

Подробно рассмотрен случай, когда $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$, $a(\tau)$ и $b(\tau)$ постоянны и

$$\alpha(\tau)=1,\qquad \beta(\tau)=-1,$$
$$a(\tau)=a>0,\qquad b(\tau)=b<0.$$

В этом случае имеются периодические решения, если уравнение

$$\frac{|b|}{a}=\frac{L_1(\nu)}{L(\nu)}\cdot\frac{\nu}{1+\nu}$$

имеет действительные решения: $\nu=\nu_{\text{стац.}}$ Здесь

$$L(\nu)=\int\limits_0^1\sqrt{(1-\xi^2)\,(1-\nu\xi^2)}\,d\xi,\qquad L_1(\nu)=\int\limits_0^1\xi^2\sqrt{(1-\xi^2)\,(1-\nu\xi^2)}\,d\xi.$$

Условие существования их представляет собой неравенство

$$\frac{|b|}{a}<\frac{1}{s}.$$

Формула для амплитуды $A_{\text{стац.}}$ имеет вид:

$$A_{\text{стац.}}=\left[\frac{L(\nu_{\text{стац.}})}{L_1(\nu_{\text{стац.}})}\right]^{\frac{1}{2}};$$

если $\nu_{\text{стац.}}=0$, то $A_{\text{стац.}}=2$,

если $\nu_{\text{стац.}}=1$, то $A_{\text{стац.}}=\sqrt{5}$.

Период вычисляется с помощью формулы (12):

при $\nu_{\text{стац.}}=0\quad \theta_{\text{стац.}}=\dfrac{2\pi}{\sqrt{a}}$;

при $\nu_{\text{стац.}}=1\quad \theta_{\text{стац.}}=\infty$.

Н. Я. Лященко (*Москва*). **Некоторые вопросы устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений.** Для решений однородных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых определены для всех вещественных значений аргумента $t\geqslant 0$, получены достаточные условия асимптотической устойчивости в предположении, что корни соответствующего характеристического уравнения имеют существенно отрицательные действительные части для всех $t\geqslant 0$, а коэффициенты самой системы удовлетворяют некоторым условиям гладкости.

Если корни характеристического уравнения указанной системы для всех вещественных значений t можно разделить на непересекающиеся группы, то сама система при некоторых дополнительных условиях, налагаемых на ее коэффициенты, может быть разделена на две подсистемы более низкого порядка. Изучаются свойства почти периодичности и аналитичности матрицы, осуществляющей указанное разделение.

Отмеченные выше предложения находят применение в теории дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами.

Полученные достаточные условия устойчивости решений однородных линейных систем применяются для изучения устойчивости одного класса нелинейных неоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ю. А. Митропольский (*Киев*). **Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах.** При исследовании колебательных систем весьма актуальной является проблема изучения нестационарных процессов.

Во многих случаях нестационарные процессы в колебательных системах описываются нелинейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

Если эти уравнения близки к линейным и коэффициенты их изменяются медленно по сравнению с «естественной» единицей времени (порядка периода колебания), то для исследования таких систем как с одной, так и со многими степенями свободы можно, исходя из асимптотических методов Крылова—Боголюбова, разработать достаточно общую методику, позволяющую решить задачу вплоть до получения не только качественных, но и количественных результатов.

Для указанных нелинейных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами возможно построить ряд эффективных алгорифмов, дающих возможность решать важные задачи физики и техники, как, например, задачу о прохождении через резонанс, задачи о колебаниях систем с переменными связями, задачу о неустановившемся режиме при запуске и остановке мотора, задачу о неустановившемся режиме в ускорительных устройствах и др.

Для разработанной методики исследования систем с медленно меняющимися параметрами рассматриваются некоторые вопросы математического обоснования и устанавливаются пределы применимости.

Е. Ф. Мищенко (*Москва*) **и Л. С. Понтрягин** (*Москва*). **Периодические решения систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных.** Различные задачи теории колебаний приводят к системам дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}^i &= f^i(x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots y^e), \\ \dot{y}^j &= g^j(x^1, \ldots, x^k, y^1, \ldots, y^e). \end{aligned} \tag{1}$$

В работе вычисляются решения таких систем на бесконечном интервале t. В случае, если система, получающаяся из (1) при $\varepsilon = 0$, имеет периодическое разрывное решение, система (1) также имеет периодическое решение. Это периодическое решение и его период вычисляются с точностью $O(\varepsilon)$.

Б. И. Мосеенков (*Киев*). **Поперечные колебания стержня двоякой жесткости в переходном режиме вращения.** Выведены дифференциальные уравнения изгибных колебаний стержня двоякой жесткости в переходном режиме вращения с учетом собственного веса, сил трения и непрерывно распределенной вдоль стержня статической неуравновешенности при изотропных шарнирного типа условиях закрепления.

В случаях, когда главные моменты инерции поперечного сечения стержня двоякой жесткости незначительно отличаются друг от друга, представляется возможным применить асимптотические методы интегрирования Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова.

В результате построены асимптотические решения в первом приближении дифференциального уравнения в неподвижной системе координат для случаев статически уравновешенного и статически неуравновешенного стержня.

Рассмотрен стационарный режим вращения стержня и вопросы устойчивости поперечных колебаний, а также переходный режим вращения при прохождении зоны параметрического резонанса и влияние статической неуравновешенности на развитие амплитуд колебаний.

В. В. Толмачев (*Москва*). **Функции распределения с временной корреляцией в статистической механике классических систем.** 1. Имея в виду обобщение известной цепочки статистических функций распределения $F_1(tx_1), \ldots, F_s(tx_1 \ldots x_s), \ldots$ Н. Н. Боголюбова, введем элементарные многовременные функции распределения

$$F^s_{m_1 \ldots m_l}(x_1 t_1 \ldots x_s t_s) =$$

$$= V^l \left\langle \prod_{i=1}^{m_1} \delta(x_i - x_1(t_i)) \prod_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} \delta(x_i - x_2(t_i)) \ldots \prod_{i=m_1+\ldots+m_{l-1}+1}^{s} \delta(x_i - x_l(t_i)) \right\rangle$$

и симметричные многовременные функции распределения

$$F_s(x_1 t_1 \ldots x_s t_s) = v^s \left\langle \prod_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{N} \delta(x_i - x_j(t_i)) \right\rangle,$$

где V — объем, в котором заключена система, N — число частиц в системе, $v = \frac{V}{N}$, символ $< \ldots >$ означает статистическое усреднение.

2. Обсужден физический смысл введенных функций распределения и получено выражение симметричных функций распределения через элементарные.

3. Получены цепочки уравнений для элементарных и симметричных функций распределения

$$\frac{\partial}{\partial t_f} F^s_{m_1 \ldots m_l}(x_1 t_1 \ldots x_s t_s) = \left[H(x_f), F^s_{m_1 \ldots m_l}(x_1 t_1 \ldots x_s t_s)\right]_f +$$

$$+ \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant l \\ n \neq g}} \int_{\Omega} \left[\Phi(|q_{s+1} - q_f|), F^{s+1}_{m_1 \ldots m_n + 1 \ldots m_l} \times\right.$$

$$\times \left.(x_1 t_1 \ldots x_{m_1+\ldots+m_n} t_{m_1+\ldots+m_n} x_{s+1} t_f x_{m_1+\ldots+m_n+1} t_{m_1+\ldots+m_n+1} \ldots x_s t_s)\right]_f dx_{s+1} +$$

$$+ \frac{N-l}{v} \int_{\Omega} [\Phi |q_{s+1} - q_f|), F^{s+1}_{m_1 \ldots m_l 1}(x_1 t_1 \ldots x_s t_s x_{s+1} t_f)]_f \, dx_{s+1}$$

$$(m_1 + \ldots + m_{g-1} + 1 \leqslant f \leqslant m_1 + \ldots + m_g, \quad 2 \leqslant g \leqslant l, \quad 1 \leqslant f \leqslant m_1, \quad g = 1),$$

$$\frac{\partial}{\partial t_k} F_s(x_1 t_1 \ldots x_s t_s) = [H(x_k), F_s(x_1 t_1 \ldots x_s t_s)]_k +$$

$$+ \frac{1}{v} \int_{\Omega} [\Phi(|q_k - q_{s+1}|), F_{s+1}(x_1 t_1 \ldots x_s t_s x_{s+1} t_k)]_k \, dx_{s+1} \qquad (1 \leqslant k \leqslant s),$$

где $H(x) = T(p) + U(q)$, $T(p) = \frac{p^2}{2m}$, $[,]_k$ означает скобки Пуассона по переменным $x_k = (q_k,\ p_k)$. На основе этих цепочек уравнений можно строить более глубокое изучение пространственно-временных корреляций в статистических системах.

4. Проведено приближенное решение цепочки уравнений для симметричных функций распределения в случае плазмы и обсуждение методов решения цепочек в случае короткодействующих сил.

В. К. Туркин (*Москва*). **Математические методы теории разделения изотопов.** Уравнения в конечных разностях для каскадов, служащих для разделения изотопов. Экстремальные проблемы. Определение разделительной способности каскада. Аппроксимация непрерывными функциями; приближенное решение нелинейной системы уравнений с частными производными. Метод термодиффузии. Метод центрифугирования.

Р. В. Хохлов (*Москва*). **Некоторые вопросы теории синхронизации автоколебательных систем.** Большинство исследований гармонических колебаний выполнено методом усреднения, разработанным Б. Ван дер Полем, Н. М. Крыловым, Н. Н. Боголюбовым и др. Для описания автоколебаний этот метод приводит к более простым, чем исходные, дифференциальным уравнениям, которые иногда уже можно эффективно решить.

Однако зачастую даже эти укороченные уравнения являются столь сложными, что их непосредственный анализ не представляется возможным, и возникает необходимость дальнейшего упрощения.

В последние годы был разработан метод анализа «слабой» синхронизации автоколебательных систем. «Слабая» синхронизация характеризуется тем, что ширина полосы синхронизма меньше, по порядку величин, обратных добротностям автоколебательных систем. Это выделяет малый параметр в самих укороченных уравнениях. Тогда можно построить последовательность асимптотических решений, описывающих процессы синхронизации на длительном временном интервале.

Указанный метод был применен к исследованию процессов синхронизации трех типов.

а) Действие на автоколебательную систему гармонической внешней силы с частотой, находящейся в дробно-рациональном отношении к частоте автоколебаний. При этом был выяснен ряд деталей, сопровождающих процесс синхронизации.

б) Взаимодействие автоколебательных систем. При этом имеет место взаимная синхронизация систем, причем внутри полосы синхронизма частота и амплитуда колебаний могут меняться скачкообразно. Был изучен характер этих скачков и были решены практически важные задачи о взаимной синхронизации отражательных клистронов, трех автогенераторов и автоколебательных систем с частотами, находящимися в дробно-рациональном отношении.

в) В настоящее время ведутся исследования действия модулированных внешних сил на автоколебательные системы. В этом случае задачи сводятся к отысканию решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. Уже решены задачи о воздействии на автогенератор импульсного сигнала и амплитудно-модулированного сигнала.

Изложенный метод может быть полезен и для анализа других задач теории автоколебаний — задачи о стабилизации частоты автогенератора путем затягивания, задачи об автомодуляции колебаний в ламповом генераторе и т. п.

Н. Н. Яненко (*Москва*). **Асимптотические формулы для функционалов решений уравнений Томаса—Ферми.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = sI_{1/2}\left(\frac{\beta}{s}\right) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\beta(0) = \beta_0, \tag{2}$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta}{s} = f \quad \text{при } s = b. \tag{3}$$

Здесь $I_k(y)$ — функция

$$I_k(y) = \int_0^\infty \frac{x^k dx}{e^{x-y}+1}. \tag{4}$$

Образуем функционалы от решения $\beta(s)$:

$$L_1 = \frac{b^3}{\beta_0} I_{5/2}(f), \tag{5}$$

$$L_2 = \frac{1}{\beta_0} \int_0^l I_{3/2}\left(\frac{\beta}{s}\right) s^2 ds. \tag{6}$$

Получены асимптотические формулы для функционалов L_1, L_2 при $\beta_0 \to 0, \infty$; $b \to 0, \infty$ (четыре случая). Полученные формулы находят применение в теории уравнений состояния одноатомного газа.

СЕКЦИЯ ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

И. Г. Башмакова (*Москва*). **Трактовка некоторых проблем математического анализа в древнегреческой математике.** 1. В античной математике наряду с методами определения площадей и объемов, равносильными интегрированию, были развиты и другие разделы математики, которые мы теперь относим к математическому анализу, а именно: общая теория отношений, эквивалентная в известном смысле теории вещественного числа, элементы теории пределов, методы определения экстремумов и нахождения касательных к кривым, равносильные дифференцированию. Все это позволяет говорить о математическом анализе в античной математике. В докладе рассматриваются общая теория отношений, элементы теории пределов и дифференциальные методы.

2. В древности существовало три способа построения теории отношений, аналогичных нашим трем способам введения вещественных чисел: теории сечений Дедекинда, теории непрерывных дробей и методу последовательностей Кантора. Первый способ был развит Евдоксом и изложен Эвклидом в V книге «Начал». Следы второго способа имеются в сочинениях Аристотеля и в «Началах» Эвклида. Реконструкцию этого способа дал О. Бекер. Существование метода последовательностей можно установить по некоторым местам из Платона. Развитие этого направления можно усмотреть в «Измерении круга» Архимеда.

3. Метод исчерпывания древних содержал в себе элементы теории пределов, которые применялись не только для определения площадей и объемов. Древние доказали некоторые вполне общие предложения теории пределов, как, например, теорему о том, что (в современных обозначениях) $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} = k$, если $\frac{a_n}{b_n} = k$ и $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Доказательство, как правило, проводилось для конкретных величин, но так, что оно могло быть дословно повторено и для любых других величин, подчиняющихся известным условиям. Пользуясь общими методами, выработанными Евдоксом, математики древности нашли много замечательных пределов, как, например, $\lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{\sin \varphi}{\varphi} = 1$ (Динострат). Архимед с помощью тех же методов нашел производную, которую в наших обозначениях можно записать так:

$$\lim \frac{\sec(\alpha + \Delta\alpha) - \sec \alpha}{\Delta\alpha} = \operatorname{tg} \alpha \sec \alpha.$$

4. Древние принимали в качестве характеристического следующее свойство непрерывных величин: величина между двумя своими значениями принимает все промежуточные. Поскольку древние имели дело только с монотонно изменяющимися величинами, то их понимание непрерывных величин совпадает с нашим. Формулировка упомянутого свойства непрерывных величин встречается у Платона, Антифонта, Аристотеля и др. Архимед и Динострат доказывали это свойство для конкретных величин и их отношений.

5. В сочинении «О спиралях» при нахождении подкасательной к спирали $\rho = \varphi$ Архимед дал общий метод нахождения касательных к кривым, заданным в поляр-

ных координатах, который сводится к определению предела отношения $\frac{\Delta r}{r\Delta\varphi}$ при $\Delta\varphi \to 0$, где Δr — приращение полярного радиуса-вектора, соответствующее приращению угла $\Delta\varphi$. Архимед доказал предложение, эквивалентное $\frac{\rho}{S} = \lim\limits_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta r}{r\Delta\varphi}$, где S — полярная подкасательная. В случае $\rho = \varphi$ он нашел, что $S = \rho^2 = \rho\varphi$.

6. Архимед нашел необходимое условие для того, чтобы некоторое выражение имело экстремум. Он установил, что значение аргумента, дающее максимум M выражению $x_2\ (a-x)$, необходимо является точкой, в которой кривые $y=x_2$ и $y=\frac{M}{a-x}$ имеют общую касательную. Рассуждения Архимеда являются вполне общими, они могут быть дословно повторены для любого выражения $f(x)g(x)$. Условие Архимеда эквивалентно $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0$.

Так как Архимед владел общим методом нахождения касательных, он мог путем сведения решать и очень широкий класс задач на экстремумы.

7. Последовательность в обосновании проблем анализа в древности была противоположна той, которая имела место в современной математике. У нас, вначале, были построены метод пределов и метод интегральных сумм, а затем, только в 60-х гг. XIX века, дано обоснование вещественного числа. В античной математике общая теория отношений была построена Евдоксом в IV в. до н. э., он же на ее основе разработал элементы теории пределов. Введение интегральных сумм и рассмотрение производных относится к III в. до н. э. Это было сделано Архимедом. Таким образом, путь развития греческой математики является в известном смысле более естественным. Мы всегда следуем ему при преподавании математического анализа.

С. Е. Белозеров (*Ростов на Дону*). **Работы русских математиков XIX в. по теории функций комплексного переменного.** Распространенное мнение о том, что русские математики XIX в. обошли стороной теорию функций комплексного переменного и якобы не проявляли интереса к этой ветви математики, является ошибочным.

Хотя в области теории функций комплексного переменного русские математики XIX в. не заняли такого почетного места в мировой науке, как, например, в области теории чисел, теории вероятностей и в некоторых областях классического анализа, но русские математики прошлого века проявляли большой интерес и к новой в то время ветви математического анализа — к теории функций комплексного переменного.

Еще в первой половине XIX в. знаменитые русские математики М. В. Остроградский и П. Л. Чебышев посвящали отдельные свои работы развитию некоторых идей нарождавшейся в то время самостоятельной ветви математического анализа — теории функций комплексного переменного.

Гениальные труды Н. И. Лобачевского по неэвклидовой геометрии послужили в дальнейшем стимулом для развития новых разделов теории функций комплексного переменного, а геометрия Лобачевского стала выступать как геометрия аналитических функций одного комплексного переменного.

Н. И. Лобачевский, С. В. Ковалевская и другие русские математики и инженеры (И. А. Вышнеградский) использовали свойства функций комплексного переменного в своих работах.

Многие русские математики второй половины XIX в. успешно популяризировали эту вновь народившуюся ветвь математического анализа среди математиков и учащейся молодежи.

Часть математиков того времени не только использовали методы теории функций комплексного переменного в своих трудах по интегральному исчислению, дифференциальным уравнениям, эллиптическим и цилиндрическим функциям и т. д., но при изучении свойств функций комплексного переменного получили оригинальные результаты, явившиеся существенным вкладом в развитие теории.

Известно, например, что уже в 60-е и 70-е годы XIX в. появился ряд магистерских и докторских диссертаций русских математиков на эту тему. Назовем некоторые из них: 1. К. Карастелев «Теория интегралов функций мнимого переменного количества» (магистерская диссертация, М., 1860); 2. М. Ващенко-Захарченко «Риманова теория функций составного переменного» (докторская диссертация, Киев, 1866); 3. Ю. В. Сохоцкий «Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями» (магистерская диссертация, 1868); 4. Ю. В. Сохоцкий «Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды» (докторская диссертация, 1873).

В 60-х годах XIX в. Ю. В. Сохоцкий — в Петербурге, а А. Ю. Давыдов и Н. В. Бугаев — в Москве начали чтение студентам специального курса теории функций комплексного переменного.

В 1870 г. преподаватель математики одной из варшавских гимназий К. Герц выпускает впервые на русском языке учебник «Теория функций мнимого переменного» (Варшава, 1870). В конце XIX в. (1892) появился более совершенный учебник П. М. Покровского «Теория функций комплексного переменного» и в начале XX в. (1906) еще более совершенный учебник С. Е. Савича «Теория функций комплексного переменного».

Из известных нам ученых вопросами теории функций комплексного переменного в той или иной мере занимались: в Москве — Давыдов, Бугаев, Жуковский, Чаплыгин, Некрасов; в Петербурге — Сохоцкий, Савич; в Киеве — Ващенко-Захарченко, Покровский, Букреев, Ермаков и Пшеборский; в Казани — Масимович; в Одессе — Карастелев, Тимченко; в Варшаве — Герц, Сонин, Анисимов; в Харькове — Тихомандрицкий и Имшенецкий.

При более детальном изучении этого вопроса, вероятно, выяснится и еще ряд имен русских математиков, проявлявших интерес к этой теории.

Некоторые русские математики XIX в. (особенно И. Ю. Тимченко) проявляли интерес к истории вопроса и разрабатывали ее (см. [1]).

Необходимо дальнейшее более детальное изучение работ русских математиков по теории функций комплексного переменного.

Лит.: 1. Белозеров С. Е., Труды Ин-та истории естествознания и техники АН СССР, 1956.

И. Я. Депман (*Ленинград*) **и В. Н. Молодший** (*Москва*). **Первое математическое общество в России.** 1. «Московское общество математиков», утвержденное в 1811 г., и его учредители Муравьевы.

2. Представители фамилии Муравьевых в истории математического просвещения в России: Н. Е. Муравьев, автор первой алгебры на русском языке (1752); его сын Н. Н. Муравьев — директор Московского общества математиков — и М. Н. Муравьев.

3. Деятельность общества по распространению математического просвещения в России чтением лекций и переводами классических математических трудов на русский язык.

4. Целеустремленность работы общества и преобразование его впоследствии в училище для подготовки математически образованных офицеров генерального штаба.

5. Деятели общества математиков, помимо Муравьевых, оставившие следы в русской математической литературе.

6. Декабристы — слушатели курсов в обществе математиков (15 человек), продолжавшие математическую просветительную работу на каторге и поселении в Сибири

В. А. Добровольский (*Киев*). **Деятельность киевской математической школы в 1908—1917 гг.** Уже в работах киевских математиков второй половины XIX в. — П. Э. Ромера, М. Г. Ващенко-Захарченко, В. П. Ермакова и др. — нашла широкое отражение алгебраическая тематика. Благодаря их работам Киевский университет выдвигается на первое место по распространению новых идей в алгебре с 80-х—90-х гг. XIX в.

Особенное развитие получила алгебраическая тематика в начале XX в. благодаря Д. А. Граве. Придя в 1902 г. в Киевский университет, он нашел здесь уже достаточно подготовленную почву для дальнейшей успешной работы в этом направлении. На рубеже 900-х годов появился ряд специальных статей по этой же тематике Букреева, Ермакова, Покровского, Пфейффера.

Выдающейся заслугой Граве было существенное расширение тематики за счет рассмотрения новых вопросов и привлечение молодежи к научной работе в области новой алгебры и теории чисел.

Особенное значение имели организованные им просеминар и семинар, которыми руководили также В. П. Ермаков и В. П. Вельмин. Участниками семинара были К. Ф. Абрамович, Б. Н. Делоне, Е. И. Жилинский, А. М. Островский, О. Ю. Шмидт, Н. Г. Чеботарев и др. Уже в 1912—1917 гг. молодые ученики Граве выступили с рядом оригинальных работ, содержащих частью новые упрощенные и уточненные доказательства известных теорем, частью ранее не известные результаты.

Таким образом, этот период характеризуется здесь возникновением известной алгебраической школы.

Киевская математическая школа сыграла выдающуюся роль в истории математики нашей родины. Через нее вошли в нашу науку новые идеи алгебры и теории чисел. Ее воспитанники и в последующие годы, уже в советское время, внесли огромный вклад в дальнейшее развитие математической науки, а самые выдающиеся ее ученики — О. Ю. Шмидт, Б. Н. Делоне и Н. Г. Чеботарев — стали основателями новых алгебраических школ в крупнейших научных центрах нашей страны — Москве, Ленинграде и Казани.

С. Н. Киро (*Одесса*). **Математика на съездах русских естествоиспытателей и врачей.** Одним из проявлений общественно-демократического движения шестидесятых годов в России явилось проведение съездов ученых и широких кругов интеллигенции по различным отраслям знания. Всероссийские съезды русских естествоиспытателей и врачей, несмотря на препятствия официальных кругов, проводились с 1867 по 1913 г. Съезды состоялись в Петербурге (первый в 1867—1868 г., шестой в 1879 г., восьмой в 1889—1890 г., одиннадцатый в 1901 г.), в Москве (второй в 1869 г., девятый в 1894 г., двенадцатый в 1909—1910 г.), в других университетских городах России: в Киеве (третий в 1871 г., десятый в 1898 г.), в Казани (четвертый в 1873 г.), в Варшаве (пятый в 1876 г.), в Одессе (седьмой в 1883 г.), а также в Тифлисе (тринадцатый в 1913 г.). На всех съездах работала математическая секция, включавшая часто в свою программу механику и астрономию. На первых съездах она объединяла деятельность в среднем около 50 членов, на последних съездах число членов доходило до 450, причем значительную часть их составляли преподаватели средних учебных заведений.

Несмотря на значительное содействие съездов успехам отечественной науки и распространению научных знаний, их деятельность мало освещена. В частности, математическая деятельность лишь первых четырех съездов была сравнительно подробно рассмотрена В. В. Бобыниным (Физико-математические науки в их настоящем и прошедшем, т. 12, 1893—1894 г.).

В работе математической секции принимали деятельное участие П. Л. Чебышев, В. Г. Имшенецкий, А. А. Марков, А. Н. Коркин, Н. Я. Сонин, Е. И. Золотарев, Г. Ф. Вороной, С. В. Ковалевская, Н. Е. Жуковский, В. А. Стеклов, А. Ю. Давидов, Н. В. Бугаев, Б. К. Млодзеевский, Д. Ф. Егоров, В. П. Ермаков, К. А. Андреев, Д. М. Синцов, А. В. Васильев, В. В. Бобынин и другие известные отечественные математики, которые оказывали стимулирующее влияние на развитие научной деятельности многих участников съездов.

На съездах было сделано около 230 докладов и сообщений по математическому анализу, теории дифференциальных уравнений, математической физике, теории функций, алгебре, теории чисел, геометрии и истории математики, а также по элементарной математике и вопросам преподавания. Многие из них были опубликованы в изданиях съездов, а также в «Математическом сборнике» и других изданиях. Некоторые доклады содержали выдающиеся открытия русской математической мысли.

Наиболее значительны среди докладов по математическому анализу доклады П. Л. Чебышева на втором и третьем съездах о его исследованиях по теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, составляющих важнейшую часть современной теории приближения функций, а также доклады В. П. Ермакова о найденном им признаке сходимости рядов, являющемся одним из наиболее сильных, Н. Я. Сонина на третьем съезде о дифференцировании с произвольным показателем, доклады С. В. Ковалевской на шестом и И. П. Долбни на последующих съездах об абелевых и псевдоэллиптических интегралах, доклад Г. Ф. Вороного на одиннадцатом съезде по обобщению понятия суммы ряда на расходящиеся ряды.

Многочисленные доклады по теории дифференциальных уравнений в основном касались теории интегрирующего множителя и теории линейных уравнений. Среди них выделяется доклад С. А. Чаплыгина на двенадцатом съезде о приближенном методе решения дифференциальных уравнений, широко разрабатываемом в настоящее время.

По математической физике наибольший интерес представляют доклады В. А. Стеклова на двенадцатом съезде, содержавшие итоги его широко известных в настоящее время исследований по представлению решений в виде рядов по фундаментальным функциям граничных задач, и доклады Г. В. Колосова на том же съезде, в которых к решению плоской задачи теории упругости была применена теория функций комплексного переменного.

Большое число докладов по различным вопросам теории чисел было сделано Н. В. Бугаевым. В докладе Ю. В. Сохоцкого на шестом съезде об идеальных кубических числах получила дальнейшее развитие теория делимости алгебраических чисел Е. И. Золотарева.

Съезды содействовали введению метрической системы мер в нашей стране, разработке русской научной терминологии, оказывали моральную и посильную материальную поддержку различным научным начинаниям. Они также сыграли положительную роль в разработке вопросов преподавания математики, уделяя им значительное внимание в последнее время.

В заключение отметим, что первый Всероссийский математический съезд состоялся в Москве в 1927 г., первый Всесоюзный съезд — в 1930 г. в Харькове, второй Всесоюзный съезд — в 1934 г. в Ленинграде.

Э. Я. Кольман (*Москва*). **О некоторых нерешенных вопросах истории античной математики.** В сообщении указывается, что в истории математики, в частности античной, имеются нерешенные проблемы, относящиеся к хронологии и персоналиям, математическим приемам, к объяснению причин, вызвавших те или другие факты. К последней группе вопросов, заслуживающей наибольшего внимания, относятся такие: почему теоретическая математика оформилась именно в Греции, каков был характер кризиса, связанного с открытием несоизмеримых, как развивалась идея бесконечности в древнегреческой математике, почему греки допускали лишь применение линейки и циркуля, причем с известными ограничениями, почему в «Начала» Эвклида не вошли все геометрические знания греков его эпохи, почему римляне не развили теоретическую математику и др. Дается попытка наметить решение некоторых из этих вопросов.

Г. К. Михайлов (*Москва*). **Юношеские годы Леонарда Эйлера и его первые научные работы.** 1. Происхождение фамилии Эйлер.

2. Годы учения Леонарда Эйлера в Базельском университете.

3. Математическое воспитание Л. Эйлера.

4. Переезд Л. Эйлера в Петербург.

5. Научные работы Л. Эйлера базельского периода.

6. Первые научные исследования Л. Эйлера, опубликованные в «Комментариях» Петербургской Академии наук.

7. Общая характеристика юношеских научных интересов Л. Эйлера по его опубликованным трудам и ранней переписке.

Г. Б. Петросян (*Ереван*). **Математические труды Николая Артавазда.** 1. В греческих рукописях Национального хранилища рукописей в Париже хранятся математические работы Николая Артавазда, на которые впервые обратил внимание известный французский ученый, историк математики Поль Таннери.

Работы Николая Артавазда — ценный для истории математики материал. Они посвящены искусству счисления и освещают ряд вопросов логистики: в них имеются арифметические таблицы, дан способ представления чисел при помощи пальцев рук, разъяснена алфавитная система счисления, показан способ записи больших чисел. В работах Н. Артавазда даны способы четырех действий с целыми и дробными числами, метод извлечения квадратных корней из чисел в желаемом приближении, арифметические задачи разного типа, а также самостоятельный способ летоисчисления.

2. Николай Артавазд, как видно из одной его математической работы, жил в XIV веке. Свои работы он писал на греческом языке. По происхождению он, как указывал П. Таннери, был армянином. Независимо от П. Таннери арменоведы Н. Адонц и Гр. Ачарян также установили, что Николай Артвазд, переехавший в 30-х годах XIV в. из Армении в Византию, по национальности был армянином.

3. Имеется определенная связь и сходство в математических работах крупнейшего армянского математика VII в. Анания Ширакаци и математика XIV в. Николая Артавазда. Арифметические таблицы в работах Артавазда совпадают с таблицами Ширакаци. В арифметических задачах обоих авторов также наблюдается большое сходство.

Самым старым в истории математики учебником, в котором имеются арифметические таблицы и задачи, связанные с счислением в повседневной практике, является учебник Анания Ширакаци, написанный в VII в. на армянском языке. Факты показывают, что Николай Артавазд в качестве источника использовал учебник Анания Ширакаци.

4. Влияние математических трудов Анания Ширакаци на Николая Артавазда не случайно. Оно объясняется состоянием науки в Армении в VII—XIV вв., а также непосредственным участием, которое принимали армяне в экономической, политической и культурной жизни Византии.

Распространение достижений армянской математической мысли в Византии способствовало развитию математики на Востоке. В этом особенно велики были заслуги Анания Ширакаци, Левона и Николая Артавазда.

И. Б. Погребысский (*Киев*), **И. З. Штокало** (*Киев*). **Об издании полного собрания научных трудов М. В. Остроградского.** I. За последние годы, отчасти в связи с празднованием стопятидесятилетия со дня рождения М. В. Остроградского, проделана большая работа по выявлению и изучению различных материалов о его жизни и деятельности, в том числе материалов личного архива М. В. Остроградского, хранящегося в Академии наук Украинской ССР. Это дало новые источники для систематического изучения научного наследия М. В. Остроградского по всем трем основным направлениям его исследований: математическая физика, механика, математический анализ.

II. В связи с этим издание полного собрания научных трудов М. В. Остроградского должно не только облегчить ознакомление с творчеством одного из классиков отечественной науки. В нем должны быть подведены итоги работы, посвященной изучению научного наследия М. В. Остроградского, должна быть дана характеристика всей его деятельности.

В Институте математики Академии наук Украинской ССР подготовлен к печати в 1955 г. первый том полного собрания научных трудов М. В. Остроградского. Этот том содержит все работы М. В. Остроградского по математической физике. К ним даны комментарии. В томе содержится также общая статья докладчиков об исследованиях М. В. Остроградского по математической физике в связи с развитием этой области науки в первой половине XIX в.

А. Е. Райк (*Саранск*). **Новые реконструкции некоторых задач из древнеегипетских и вавилонских текстов.** 1. В древнеегипетских и вавилонских текстах имеется еще значительное число задач, решения которых не представлены достаточно убедительными реконструкциями, что, естественно, затрудняет восстановление общей картины состояния математики древнего Востока.

2. Большой интерес представляет задача из Московского папируса, в которой вычислен объем усеченной пирамиды с квадратными основаниями. Новая реконструкция этой задачи позволяет более убедительно объяснить способ ее решения и ответить на некоторые вопросы истории раннего развития геометрии.

3. В вавилонских математических клинописных текстах содержится задача, в которой требуется найти сумму квадратов натуральных чисел. Дается новая геометрическая реконструкция получения этой суммы.

4. В вавилонских математических клинописных текстах содержится группа задач на кубические уравнения. Решение некоторых типов кубических уравнений носит теоретико-числовой, а не алгебраический характер.

Б. А. Розенфельд (*Москва*). **История интерпретаций геометрии Лобачевского.** Интерпретации («модели») геометрии Лобачевского играли весьма важную роль в истории этой геометрии, так как именно с помощью интерпретаций доказывается ее непротиворечивость. Кроме того, каждая интерпретация позволяет взглянуть на изучаемое пространство с новой стороны, и те особенности этого пространства, которые ускользали от внимания при одних интерпретациях, наглядно видны при других, вследствие чего интерпретации можно назвать «стереоскопическим зрением» геометра.

Уже Лобачевский обосновывал непротиворечивость своей геометрии с помощью соображений, равносильных одной из интерпретаций этой геометрии — интерпретации плоскости Лобачевского на сфере мнимого радиуса в комплексном эвклидовом пространстве. Излагается эта интерпретация и тесно связанная с ней интерпретация плоскости Лобачевского на одной из полостей однополостного гиперболоида, предложенная Пуанкаре, которую можно рассматривать также как интерпретацию на сфере мнимого радиуса в вещественном эвклидовом пространстве со знаконеопределенной метрикой («псевдоэвклидово пространство»).

Из этой интерпретации проектированием гиперболоида из его центра на касательную плоскость получается интерпретация Бельтрами—Клейна в круге, а проектированием из «полюса» гиперболоида на его «экваториальную плоскость» («стереографическая проекция») получается интерпретация Пуанкаре в круге.

Рассматриваются также интерпретация Бельтрами части плоскости Лобачевского на псевдосфере, тесно связанная с интерпретацией Бельтрами—Клейна в круге и являющаяся проективным обобщением ее, общая интерпретация Кели—Клейна на проективной плоскости, тесно связанные с интерпретацией Пуанкаре в круге интерпретации Дарбу, Гильберта, Вельштейна и Гессе, интерпретация Котельникова многообразия прямых пространства Лобачевского на сфере в комплексном эвклидовом пространстве, позволяющая подойти к соображениям Лобачевского с новой точки зрения, а также ряд других интерпретаций, в том числе пять новых предложенных советскими геометрами, в частности, интерпретация В. Ф. Кагана, промежуточная между интерпретациями Бельтрами—Клейна и Пуанкаре в круге.

С. Д. Россинский (*Москва*). **К. М. Петерсон — создатель московской дифференциально-геометрической школы.** 1. Краткие биографические сведения.

2. Открытие К. М. Петерсоном основного предложения теории поверхностей в 1853 г. Приоритет К. М. Петерсона в этом открытии был впервые с полной достоверностью установлен докладчиком в комментариях к диссертации К. М. Петерсона «Об изгибании поверхностей», рукопись которой была обнаружена в архиве Тартуского университета; докладчиком впервые был полностью расшифрован ее математический текст после изучения имевшейся в его распоряжении фотографической копии немецкой рукописи диссертации (см. [1]).

3. Значение книги К. М. Петерсона «О кривых и поверхностях» (1868), существующей пока как библиографическая редкость только на немецком языке. Приоритет Петерсона в установлении важного понятия сопряженной сети, общей двум поверхностям (на Западе понятие это было установлено на 25 лет позже).

Приоритет Петерсона в открытии изгибания минимальных поверхностей, изгибания поверхностей переноса, приоритет в открытии спиральных поверхностей и их изгибаний.

Приоритет Петерсона в открытии и первоначальной разработке важнейшего понятия изгибания на главном основании.

Открытие им же известных теперь в науке поверхностей Петерсона (см. [2]).

Л и т.: 1. Историко-математические исследования, вып. 5, Москва, 1952, 113—133. 2. Р о с с и н с к и й С. Д., Успехи матем. наук, т. 4, в. 5, (1949).

Г. Ф. Рыбкин (*Москва*). **Новые материалы в биографии Н. И. Лобачевского.** 1. Недостаточная изученность до последнего времени архивных материалов приводила к тому, что в биографическую литературу о Лобачевском проникали неверные сведения, а отдельные стороны творческой биографии великого ученого оставались не освещенными.

2. До настоящего времени в биографической литературе приводятся неверные и разноречивые сведения о происхождении Лобачевского. Этот вопрос находит свое полное разрешение благодаря новым документам, обнаруженным Б. В. Федоренко в Центральном государственном архиве древних актов; при этом устанавливается крепостное начало в родословной Лобачевского, а также устраняется ряд неверных сведений об отце Лобачевского (род деятельности, год смерти и т. д.).

3. Опубликованная в 1948 г. Л. Б. Модзалевским метрика не разрешила полностью вопроса о точной дате рождения Н. И. Лобачевского, так как не содержала фамилии Лобачевского. Анализ материалов, разысканных группой работников Горьковского областного архива, проведенный А. А. Андроновым, строго устанавливает, что точной датой рождения Лобачевского является 20 ноября (ст. ст.) 1792 г., а ранее приводимая (особенно до 1948 г.) дата неверна.

Анализ тех же материалов, проведенный Н. И. Приваловой, позволил установить место в г. Горьком, где был расположен дом, в котором родился Н. И. Лобачевский.

4. Подготовленные к печати к столетию со дня смерти Лобачевского VI том полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского, сборник «Новые материалы для биографии Н. И. Лобачевского» и IX выпуск «Историко-математических исследований» содержат ряд исследований, документов и эпистолярных материалов, позволяющих пополнить биографию Лобачевского новыми сведениями и устранить из нее неточности, проникшие благодаря отсутствию у биографов необходимых источников (о годах учения, университетской деятельности, работе в Казанском экономическом обществе и т. д.).

С. В. Смирнов (*Москва*). **Индийская астролябия XVI века.** В Московском музее восточных культур хранится небольшая коллекция восточных астрономических инструментов, из которых наиболее интересной является астролябия — планисфера конца XVI в.

Надписи на астролябии, сделанные на персидском языке, гласят: «Сказано: знаки (rukumi) этой астролябии из астролябии хозрата (его высочества) мирзы Байсунгара светлого раджи в 996 г. в городе Лахоре» и еще: «В 996 году хиджры знаки, как сказано, по астролябии Байсунгара».

Астролябия содержит таблицу широт и долгот 85 городов, представляющую точное извлечение из таблиц Улугбека.

Астрономическое вычисление даты астролябии дает следующий результат: 15 звезд, близких к эклиптике или экватору, из числа 37 фундаментальных звезд, представленных на транспаранте астролябии, распадаются на две группы. Вычисление даты по изменению координат вследствие прецессии для звезд первой и большей группы дает 1510 г. н. э. $\pm$ 30 лет, изменение координат звезд второй группы указывает 1600 г. н. э. $\pm$ 30 лет.

Объяснением может служить предположение, что при копировании астролябии, изготовленной в самом начале XVI в., были внесены дополнения, фиксирующие дату изготовления копии, которая хорошо согласуется с обозначенной на астролябии датой 1594 г. н. э.

Байсунгар, упомянутый в надписи астролябии, может быть отождествлен с Байсунгаром сыном Шахруха и братом Улугбека или, что вероятнее, с одним из позднейших Тимуридов, мирзою Байсунгаром, который был эмиром в Самарканде в первые годы XVI столетия и был низложен Бабуром, основателем династии Великого Могола в Индии.

Так или иначе, в приборе несомненно проявляется влияние астрономической школы Улугбека, что видно из таблицы городов, таблиц пересчета времени на обратной стороне корпуса прибора и общего характера этого прибора, имеющего строго научное назначение.

По своему характеру астролябия — планисфера — представляет счетно-решающее устройство, более всего напоминая современную транспарантную номограмму, и предназначена главным образом для астрономических вычислений, но может быть применена и для измерения высоты светил над горизонтом.

Из предыдущего вытекает, что астролябия — планисфера Московского музея восточных культур — «астролябия Байсунгара» — представляет одно из наиболее ранних свидетельств влияния астрономической школы Улугбека на развитие астрономии в Индии.

В. И. Смирнов (*Ленинград*). **Научный архив А. М. Ляпунова по вопросам устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений.** Научный архив А. М. Ляпунова содержит ряд рукописей, содержание которых не вошло в напечатанные им работы.

1. Наиболее обширная рукопись носит название «Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения». В ней исследуется установившееся движение в том случае, когда определяющее уравнение первого приближения имеет два равных нулю корня, а остальные его корни имеют отрицательные вещественные части. Считается, кроме того, что равный нулю корень не обращает в нуль по крайней мере один из первых миноров основного опредлителя.

2. Рукопись «Sur une équation différentielle» посвящена исследованию уравнения

$$\frac{d^2x}{dS^2} + \mu p(S)x = 0.$$

Она содержит в основном доказательства ряда результатов, опубликованных А. М. Ляпуновым в «Comptes Rendus».

То же можно сказать и о рукописи «О характеристическом постоянном уравнения $\frac{d^2x}{dS^2} + px = 0$».

3. Рукопись «Примеры исследования устойчивости движения» содержит разбор двух механических задач.

4. Небольшая статья «Доказательство двух теорем теории интегрирования дифференциальных уравнений» посвящена вопросу об интегрировании систем обыкновенных дифференциальных уравнений с аналитическими правыми частями в виде рядов по целым положительным степеням независимого переменного и начальных данных.

А. Н. Хованский (*Иошкар-Ола*). **Работы Эйлера по теории цепных дробей.** 1. Эйлер впервые систематически разработал теорию цепных дробей, получил разложения различных функций в цепные дроби и впервые дал обобщение алгоритма цепных дробей.

2. Из применяемых ныне различных обозначений цепных дробей наиболее простым и удобным является следующее:

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \ldots + \frac{a_n}{b_n} + \ldots$$

Такое обозначение позволяет подписывать подходящие дроби под соответствующими членами звеньев цепной дроби. Вычисление числителей P_n и знаменателей Q_n подходящих дробей производится по формулам, впервые подробно изученным Эйлером: $P_n = b_nP_{n-1} + a_nP_{n-2}$, $Q_n = b_nQ_{n-1} + a_nQ_{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$, $P_0 = b_0$, $\theta_0 = 1$.

Приводим пример записи числовой дроби, полученной Эйлером:

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{4} - \frac{4}{27} - \frac{7}{9} - \frac{16}{63} - \frac{143}{81} - \dots - \frac{9n^2-1}{9(2n+1)} - \dots$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{131}{104} \quad \frac{1144}{908}$$

$$1{,}25 \quad 1{,}284 \quad 1{,}259912$$

Точное значение $\sqrt[3]{2}$ есть 1,2599210...

3. Эйлер много занимался обращением степенных рядов в цепные дроби. При этом нередко смешивают равноценные цепные дроби, подходящие дроби которых равны частным суммам преобразуемого ряда, и соответствующие цепные дроби, разложение подходящих дробей которых в степенной ряд совпадает до некоторого члена с преобразуемым рядом. Преобразование любого степенного ряда в равноценную цепную дробь производится по формуле Эйлера

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots = c_0 + \frac{c_1x}{1} - \frac{\frac{c_2}{c_1}x}{1+\frac{c_2}{c_1}x} - \dots - \frac{\frac{c_n}{c_{n-1}}x}{1+\frac{c_n}{c_{n-1}}x} - \dots$$

Члены звеньев соответствующей дроби выражаются через коэффициенты степенного ряда по сложным формулам и их лучше определять по методу, предложенному в 1803 г. русским математиком В. Висковатовым. Важно отметить, что при этом иногда всюду расходящийся (кроме нулевой точки) степенной ряд преобразуется в цепную дробь, имеющую широкую область сходимости. Так, Эйлер получил цепную дробь

$$y = \frac{1}{1} + \frac{ax}{1} + \frac{x}{1} + \frac{(a+1)x}{1} + \dots + \frac{nx}{1} + \frac{(a+n)x}{1} + \dots,$$

в которую раскладывается решение уравнения

$$x^2y' + (1+ax)y = 1; \quad y(0) = 1.$$

При попытке решить это уравнение с помощью степенных рядов приходим ко всюду расходящемуся ряду. Вышеуказанная цепная дробь равномерно сходится в любой конечной области комплексного переменного x, не содержащей ни одной точки отрицательной части вещественной оси.

4. Эйлер и Лагранж разложили в цепные дроби выражения $(1+x)^\nu$ (ν — вещественное число), $\ln x$, e^x, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$ и др. Метод, предложенный Эйлером и Лагранжем, позволяет решать различные дифференциальные уравнения с помощью цепных дробей.

5. В XIX в. была выяснена область сходимости цепных дробей, полученных Эйлером. Эти дроби имеют большую практическую ценность, но в настоящее время почти не применяются.

6. Труды Эйлера по цепным дробям и их обобщениям незаслуженно забыты. Следует перевести их на русский язык и издать, чтобы они стали доступны широким кругам математиков и инженеров.

СОДЕРЖАНИЕ

Труды третьего всесоюзного
математического съезда, т. I.

*

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии наук СССР*

*

Технический редактор *Е. Н. Симкина*

*

РИСО АН СССР № 3013-В. Т-05091. Изд. № 1861.
Тип. заказ № 711. Подп. к печ. 15/VI 1956 г.
Формат бум. $70\times108^1/_{16}$. Печ. л. 15 (20,55).
Уч.-издат. 21. Тираж 3000. Цена 14 р. 70 к.

Издательство Академии наук СССР
Москва Б-64, Подсосенский, 21.

1-я тип. Издательства АН СССР. Ленинград,
В. О., 9-я линия, дом 12.

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТРУДЫ ТРЕТЬЕГО ВСЕСОЮЗНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО СЪЕЗДА

Москва, июнь—июль 1956

Том I

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ СЕКЦИОННЫХ ДОКЛАДОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Москва-1956